

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientadora: Liliane de Almeida Maia

Simetria, Compacidade e Multiplicidade de Soluções para
Um Problema Elíptico Semilinear em \mathbb{R}^N

Michael Marcondes de Freitas
<<http://michael.mat.unb.br/>>

Brasília, 8 de julho de 2008

*Seja a mudança que
você quer ver no mundo.*

Mahatma Gandhi

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, a Professora Liliane, pela paciência, compreensão, confiança e incentivo constantes desde os tempos da iniciação científica, três anos atrás.

Agradeço aos Professores Elves, João Carlos e Nigel pelo valioso aprendizado tanto dentro como fora de sala de aula, desde a graduação, e pelas portas que me abriram. Um agradecimento especial ao Professor Celius pelos conselhos, sugestões e ajuda com o \LaTeX , figuras, fax e dezenas de outras coisas ao longo de quase seis anos de amizade. Agradeço, também, ao Professor Sérgio Monari do ICMC-USP de São Carlos por ter aceito o convite para constituir a banca examinadora e pelas sugestões.

Agradeço aos colegas e amigos da UnB desde os tempos da graduação, Dahisy, Igor, Luciana, Jeferson, Juliana, Manoela, Paulo, Renato, Sérgio, Simone e Susanne, ao amigo e colega de iniciação científica Henrique, com quem aprendi muito, aos grandes companheiros com quem tive o prazer de dividir uma sala durante o mestrado, César e Kélem, e aos colegas durante disciplinas ou seminários, Janete, Ricardo, Claudiney, Gilberto, Maxwell, Pablo, Rangel e Manuela. Agradeço, também, aos funcionários da Secretaria do Departamento de Matemática da UnB, em especial, Eveline, Hailton, Manuel e Tânia, pela ajuda com as questões administrativas.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço ao povo do segundo grau e agregados, Aline, Karina, Lucas, Ludimila, Nathalia, Renato, Rodrigo, Theresa e Valéria, pelos momentos de descontração ao longo desses dez anos de amizade. Um agradecimento especial à minha amiga Gisele, que me ajudou a descobrir quem eu sou.

Agradeço à minha família, meus avós maternos vó Maria e vô Marcondes, meus avós paternos vovó Lygia e vovô Fernando (que já partiram mas também foram fundamentais para que eu chegasse até aqui), minha mãe Valéria, meu pai Umberto e sua esposa Marise, minha irmã Andréa e seu marido Leonardo, minha irmã Mariana e seu marido André, minhas irmãs mais novas Ligia e Beatriz, e meus sobrinhos Gabriel e Guilherme, pelo amor incondicional que dá sentido aos laços sanguíneos.

Agradeço a Deus pela oportunidade, coragem e força.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	viii
1 Funções Radiais	11
1.1 Duas definições equivalentes	11
1.2 O Espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$	14
1.2.1 Aproximação por funções de classe C_c^∞	15
1.2.2 Existência de representantes contínuos	19
1.3 Decaimento no infinito	23
2 O Problema $-\Delta u + b(x)u = f(x , u)$ em \mathbb{R}^N	26
2.1 Soluções em domínios radialmente simétricos	28
2.1.1 Existência de uma solução não-trivial	29
2.1.2 A variedade de Nehari	33
2.1.3 Existência de uma solução positiva	38
2.1.4 Sumário de resultados	40
2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$	41
2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N	47
2.4 Comparação das energias	57
2.5 Regularidade	59
2.5.1 Resultados de Teoria de Regularidade	59
2.5.2 Regularidade das soluções radiais	60
3 Soluções não-Radiais	65
3.1 O Lema de Lions	66
3.2 Simetria e compacidade	70
3.3 Princípio da Criticalidade Simétrica	74
3.4 Uma Solução não-radial	77
3.5 Regularidade	79

Sumário

A	Resultados de Análise Funcional	80
A.1	Funções semicontínuas inferiormente	80
A.2	De convergência fraca para forte	82
A.3	Imersões e extensões	83
A.4	As Derivadas de Gâteaux e Fréchet	84
B	Resultados de Métodos Variacionais	88
B.1	A função g satisfaz as hipóteses (f_1) – (f_5)	88
B.2	Estimativas de crescimento	91
B.3	X com a norma $\ \cdot\ $ constitui um espaço de Hilbert	93
B.4	Regularidade do funcional φ	95
B.5	O Teorema do Passo da Montanha	100
B.6	Outro lema de deformação	102
	Referências Bibliográficas	103

Resumo

Mostramos que o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in C^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada inferiormente por uma constante positiva e $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo certas condições de crescimento (subcrítico e superquadrático) e convexidade, possui soluções radiais com qualquer quantidade finita prescrita de nós para $N \geq 2$. Também mostramos que, se a hipótese de convexidade for substituída pela hipótese de que f é não-decrescente e ímpar com respeito à variável u , então o problema possui ao menos uma solução não-radial para $N = 4$ ou $N \geq 6$.

A falta de compacidade em domínios ilimitados é superada com a restrição a subespaços de funções invariantes pela ação de subgrupos do grupo $O(N)$ das transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^N e os objetivos são alcançados combinando-se o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio da Criticalidade Simétrica. Para a obtenção das soluções radiais nodais, aplicamos o método de Nehari de concatenação de soluções positivas e negativas em regiões anulares vizinhas.

Abstract

We show that the semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in C^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

where $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function bounded below by a positive constant and $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function for which certain growth (subcritical and superquadratic) and convexity conditions hold, has radial solutions with any prescribed finite number of nodes, for $N \geq 2$. We also show that if the convexity hypothesis is replaced by f nondecreasing and odd with respect to the variable u , then the problem still has at least one nonradial solution, for $N = 4$ or $N \geq 6$.

The lack of compactness is overcome by the restriction to subspaces of functions invariant under the action of subgroups of the group $O(N)$ of the orthogonal linear transformations of \mathbb{R}^N , and the results are achieved through a combination of the Mountain Pass Theorem and the Principle of Symmetric Criticality. Nodal radial solutions are constructed following the method of Nehari of piecing together positive and negative solutions on alternating annuli.

Introdução

Neste trabalho, discutimos a existência e multiplicidade de soluções não-triviais para uma classe de equações elípticas semilineares em \mathbb{R}^N , a saber, as equações

$$-\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u), \quad (0.1)$$

onde $N \geq 2$, $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua limitada inferiormente por uma constante positiva e $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo certas condições de crescimento (subcrítico e superquadrático) e convexidade. Equações dessa forma aparecem na Física quando se buscam certos tipos de soluções estacionárias para problemas não-lineares do tipo Klein-Gordon ou Schrödinger. Se consideramos, por exemplo, soluções do tipo $\Phi(t, x) = e^{-imt} u(x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ (*standing wave solutions*), onde m é uma constante positiva, para a equação de Schrödinger

$$i\Phi_t - \Delta\Phi = \widehat{f}(\Phi),$$

em que $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ e $\widehat{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz a condição de simetria

$$\widehat{f}(\rho e^{i\theta}) = f(\rho) e^{i\theta}, \quad \rho, \theta \in \mathbb{R},$$

então obtemos o caso particular autônomo de (0.1) dado por

$$-\Delta u + mu = f(u),$$

onde o coeficiente b também não depende de x . Equações do tipo (0.1) também são relevantes em diversos outros contextos da Física tais como mecânica estatística, falso vácuo em cosmologia, óptica não-linear, propagação de raios laser (conferir [22], [6] e referências listadas nestes artigos).

Como a equação (0.1) é invariante por transformações lineares ortogonais, é natural pensar que suas soluções, caso existam, possam ser radiais. Além de soluções radiais terem sentido físico, frequentemente é mais fácil lidar com funções radiais devido ao fato de que elas podem ser vistas como funções bem mais simples, de uma única variável. Uma das vantagens se expressa na questão da regularidade das soluções. Ao optar pela abordagem variacional e procurar por soluções fracas para (0.1) em $H^1(\mathbb{R}^N)$, uma solução radial, caso exista, já é contínua (exceto, possivelmente, na origem)

Introdução

independentemente das hipóteses sobre os coeficientes b e f (Teorema 1.3). Mais ainda, para que a solução seja clássica (de classe C^2), basta que f seja contínua, além, é claro, de satisfazer as condições de crescimento e convexidade que já são necessárias para a abordagem variacional (Subseção 2.5.2).

Seguimos as idéias de Bartsch & Willem [4] para obter soluções radiais para a equação (0.1) com qualquer quantidade finita prescrita de nós. Aplicamos o método de Nehari (veja [13] e [4]) de concatenar soluções em regiões anulares

$$\Omega(\rho, \sigma) := \text{int}\{x \in \mathbb{R}^N; \rho \leq |x| < \sigma\}, \quad 0 \leq \rho < \sigma \leq \infty,$$

satisfazendo a condição de fronteira $u = 0$ em $\partial\Omega(\rho, \sigma)$, alternando entre soluções positivas e negativas. Dados $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1}$ com $0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_k < \rho_{k+1} = \infty$, sejam u_j uma solução radial de

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in H_0^1(\Omega(\rho_j, \rho_{j+1})), \end{cases} \quad j = 0, \dots, k, \quad (0.2)$$

e suponhamos que u_j e u_{j+1} tenham sinais opostos para cada $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Pela Teoria de Regularidade de Soluções desenvolvida na Subseção 2.5.2 e pela continuidade das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$ longe da origem, u_j é solução clássica de (0.2), $j \in \{0, \dots, k\}$; em particular,

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u_j(x), \quad \rho_j \leq |x| < \rho_{j+1}, \quad j = 0, \dots, k \end{aligned}$$

satisfaz (0.1) pontualmente em $U := \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \neq \rho_j, j = 1, \dots, k\}$ e tem precisamente k nós nas esferas $|x| = \rho_j, j = 1, \dots, k$. Tendo sido obtidas soluções clássicas positivas e negativas para os problemas (0.2), o problema central é, portanto, mostrar que os nós podem ser escolhidos de forma que u também seja diferenciável até segunda ordem nos pontos onde se anula. Usando propriedades da variedade de Nehari, estabelecemos propriedades para os valores críticos $\lambda^{\epsilon_j}(\rho_j, \rho_{j+1})$ associados a $u_j, j = 0, \dots, k$, que nos permitem concluir que o mínimo das somas

$$\sum_{j=0}^k \lambda^{\epsilon_j}(\rho_j, \rho_{j+1}), \quad 0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_k < \rho_{k+1} = \infty,$$

está bem definido e a função u correspondente é de classe C^2 .

Tendo sido obtidas as soluções radiais (nodais), é natural questionar a existência de outros tipos de soluções. Sob essencialmente as mesmas condições, é possível obter uma sequência ilimitada de soluções não-radiais para (0.1) nos casos em que $N = 4$ ou $N \geq 6$ [5]. As únicas diferenças são que f deve ser ímpar e, para que soluções fracas sejam clássicas, Hölder

Introdução

contínua de expoente $\alpha > 0$ com respeito à variável u . O método consiste em uma aplicação do Teorema da Fonte. Neste trabalho, nos limitamos a garantir a existência de apenas uma solução não-radial. Mostramos que subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$ de funções invariantes por simetrias menos restritivas que radialidade ainda estão imersos compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$, onde $2^* = 2N/(N - 2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Aplicando o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio da Criticalidade Simétrica, encontramos uma solução não-radial.

No **Capítulo 1**, discutimos em profundidade o conceito de função radial, essencial para o estudo desenvolvido no Capítulo 2. A principal motivação para separarmos a discussão do conceito de função radial da discussão de funções satisfazendo simetrias menos restritivas, feita no Capítulo 3 sob uma perspectiva mais algébrica e geral, é que a abordagem analítica nos permite ver mais claramente a relação entre o espaço das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$ e o espaço $H^1((0, \infty))$. Em especial, a existência de representantes contínuos exceto, possivelmente, na origem para as funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$, propriedade essencial para a demonstração da Proposição 2.3 e para a construção feita na Seção 2.3, é naturalmente obtida da propriedade análoga das funções de $H^1((0, \infty))$.

O **Capítulo 2**, o principal do trabalho, contém a prova de que (0.1) possui soluções radiais com qualquer quantidade finita prescrita de nós; em particular, a equação possui infinitas soluções. Além disso, mostramos que a energia de uma solução nodal é estritamente crescente com o número de nós e tende a infinito quando a quantidade de nós tende a infinito. A regularização das soluções obtidas é feita ao final do capítulo.

No **Capítulo 3**, retomamos a discussão iniciada no Capítulo 1 sob um enfoque mais algébrico. Estabelecemos a compacidade da imersão de subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$, maiores que o das funções radiais, em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < 2^*$, apresentamos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais e mostramos que (0.1) também possui soluções não-radiais.

No **Apêndice A**, apresentamos resultados abstratos em Análise Funcional. Aqueles para os quais demonstrações nem sempre são fáceis de se encontrar são provados em detalhe. No **Apêndice B**, apresentamos os detalhes técnicos de alguns fatos utilizados nos Capítulos 2 e 3, bem como outros resultados em Métodos Variacionais tais como uma pequena alteração na forma clássica de enunciar o Teorema do Passo da Montanha.

Mais detalhes a respeito do que é feito em cada seção podem ser encontrados no início de cada capítulo.

Capítulo 1

Funções Radiais

Neste capítulo, estudamos o conceito de função radial sob um enfoque analítico com dois objetivos principais: (1) a existência de representantes contínuos exceto, possivelmente, na origem para as funções de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ e (2) a compacidade das imersões $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$. O fato (1) será usado na demonstração da Proposição 2.3 e na construção feita na Seção 2.3. Usaremos (2) na prova do Lema 2.2 para verificar a condição de Palais-Smale.

Na **Seção 1.1**, apresentamos as duas formas—uma analítica (Definição 1.1) e outra algébrica (Definição 1.2)—de definir funções radiais encontradas nas referências consultadas ([14, § 6.1, pág. 250] e [25, Definition 1.23, § 1.5, pág. 17]) e mostramos que elas são equivalentes (Teorema 1.2).

A seguir, na **Seção 1.2**, introduzimos o espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usamos a forma analítica da definição radial (Definição 1.1) para estudar uma função $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ por meio de seu representante f na reta. Em particular, provamos a existência de representantes contínuos exceto, possivelmente, na origem, para cada uma das funções de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ (Teorema 1.3).

O capítulo é encerrado na **Seção 1.3** com o enunciado e demonstração das desigualdades de Strauss [22, Radial Lemma 1] e Lions [16, Lemme I.1], reunidas na Proposição 1.3, que nos dão estimativas de decaimento no infinito para o valor absoluto das funções de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ e as imersões compactas $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

1.1 Duas definições equivalentes

Um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é dito radialmente simétrico se é mensurável e satisfaz

$$x_0 \in \Omega, |x| = |x_0| \Rightarrow x \in \Omega.$$

O requerimento de que Ω seja mensurável é importante para que possamos definir funções mensuráveis sobre o conjunto.

1.1 Duas definições equivalentes

Dependendo da situação em que nos encontramos, uma das duas definições de função radial abaixo é mais conveniente.

Definição 1.1 (Forma Analítica). *Sejam Ω um subconjunto radialmente simétrico de \mathbb{R}^N e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que u é uma função radial ou radialmente simétrica se existe $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x) = f(|x|)$ para quase todo $x \in \Omega$.*

Definição 1.2 (Forma Algébrica). *Dados um subconjunto radialmente simétrico $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que u é uma função radial ou radialmente simétrica se, para cada transformação linear ortogonal $S : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, a igualdade $u(Sx) = u(x)$ vale para quase todo $x \in \Omega$.*

A forma analítica nos permite ver funções radiais como funções na reta, reduzir certas integrais em \mathbb{R}^N a integrais em $(0, \infty)$ via coordenadas polares e obter propriedades para uma função radial u a partir de propriedades para seu representante f na reta e vice-versa. A forma algébrica pode ser naturalmente generalizada ao conceito de funções invariantes pela ação de um dado subgrupo do grupo $O(N)$ (com a operação de composição) de todas as transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^N (Seção 3.2). Embora ambas definições façam sentido sem que tenhamos necessariamente $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, essa restrição é importante para a prova da equivalência das definições que damos no Teorema 1.2. No entanto, funções de L^1_{loc} já são suficientemente gerais para os propósitos deste trabalho.

Se u é radialmente simétrica no sentido da Definição 1.1, então u também é radial no sentido da Definição 1.2. De fato, dada qualquer transformação linear ortogonal S de \mathbb{R}^N em \mathbb{R}^N , vale

$$u(Sx) = f(|Sx|) = f(|x|) = u(x)$$

para quase todo $x \in \Omega$, pois S é uma isometria. É a recíproca que, embora também intuitiva, é mais difícil de justificar. Usamos o Teorema de Diferenciação de Lebesgue.

Denotamos por $B(x, \delta)$ a bola de centro $x \in \mathbb{R}^N$ e raio $\delta > 0$.

Teorema 1.1 (Teorema de Diferenciação de Lebesgue). *Se $\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(y, \delta)|} \int_{B(y, \delta)} \psi(x) dx = \psi(y) \quad (1.1)$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Apliquemos [21, Theorem 7.10, pág. 140], que é o resultado acima para funções em $L^1(\mathbb{R}^N)$, à função $\psi_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{se } |x| < n, \\ 0, & \text{se } |x| \geq n, \end{cases}$$

1.1 Duas definições equivalentes

para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluímos que o conjunto dos pontos $y \in \mathbb{R}^N$ para os quais a igualdade em (1.1) não vale é a reunião enumerável de conjuntos de medida nula e, portanto, tem medida nula. ■

Teorema 1.2. *As Definições 1.1 e 1.2 são equivalentes.*

Demonstração. (\Rightarrow) Vimos logo antes do enunciado do Teorema 1.1 a justificativa de que, se u é radialmente simétrica no sentido da Definição 1.1, então u também é radial no sentido da Definição 1.2.

(\Leftarrow) Se Ω não é todo o \mathbb{R}^N , estendemos u a \mathbb{R}^N colocando $u(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Notemos que esta extensão está em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Pelo Teorema 1.1, temos

$$u(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(y, \delta)|} \int_{B(y, \delta)} u(x) dx \quad (1.2)$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$. Fixemos arbitrariamente $y_0 \in \mathbb{R}^N$ para o qual a igualdade seja válida. Dado $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y| = |y_0|$, seja $S(y, y_0) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma transformação linear ortogonal que leva y a y_0 . Temos que $S(y, y_0)$ é uma isometria, portanto leva $B(y, \delta)$ a $B(y_0, \delta)$ para qualquer $\delta > 0$. Como $S(y, y_0)$ é de classe C^1 com $[S(y, y_0)]'(x) = 1$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, segue pelo Teorema de Mudança de Variáveis [21, Theorem 7.26, págs. 153–156] e pela Definição 1.2 que

$$\begin{aligned} u(y_0) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(y_0, \delta)|} \int_{B(y_0, \delta)} u(x) dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(y, \delta)|} \int_{B(y, \delta)} u([S(y, y_0)](x)) |[S(y, y_0)]'(x)| dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(y, \delta)|} \int_{B(y, \delta)} u(x) dx. \end{aligned}$$

Fica, assim, bem definida uma função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(r) = u(y_r)$, se existe um $y_r \in \mathbb{R}^N$ que satisfaz (1.2) e $|y_r| = r$, e $f(r) = 0$, caso contrário. Agora,

$$u(y) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(y, \delta)|} \int_{B(y, \delta)} u(x) dx = f(|y|)$$

para quase todo $y \in \mathbb{R}^N$, em particular, para quase todo $y \in \Omega$. ■

Em virtude deste resultado, a definição de função radial como sendo uma função satisfazendo qualquer das Definições 1.1 e 1.2 fica bem posta.

Não encontramos uma prova para o Teorema 1.2 em nenhuma das referências consultadas. Em [14, § 6.1, pág. 250], o autor define funções com simetria esférica (*à symétrie sphérique*) como sendo aquelas que satisfazem a Definição 1.2 e, em seguida, diz que estas funções satisfazem a Definição 1.1. Mas nenhuma justificativa do fato é apresentada. Agradecemos ao Professor R. R. Silva pela idéia de usar o Teorema de Diferenciação de Lebesgue.

1.2 O Espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$

Notação. Daqui para o final do Capítulo 1, sempre que $u, u_n, \widehat{u}, \dots \in L_{loc}^1(\Omega)$ forem funções radiais, $f, f_n, \widehat{f}, \dots : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ serão funções tais que $u(x) = f(|x|)$ para quase todo $x \in \Omega$, $u_n(x) = f_n(|x|)$ para quase todo $x \in \Omega$, e assim por diante.

1.2 O Espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$

Denotamos por $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ o subespaço das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$. No próximo capítulo trabalharemos com subespaços convenientes de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ e precisaremos de algumas propriedades que as funções deste subespaço herdam das funções de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$.

Sabemos que o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ com a norma usual $\|\cdot\|_{H^1} : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2) dx \right)^{1/2}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1} : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)v(x)) dx, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

(conferir [7, Proposição IX.1, pág. 150]).

Proposição 1.1. $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Pela Definição 1.2, temos que $0 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, que é, portanto, não-vazio, e

$$(u_1 + \alpha u_2)(Sx) = u_1(Sx) + \alpha u_2(Sx) = u_1(x) + \alpha u_2(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, quaisquer que sejam $S \in O(N)$, $u_1, u_2 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ com a norma induzida por $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial normado. Na verdade, a restrição $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1} \big|_{H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \times H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)}$ é um produto interno em $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$. Nos resta mostrar que $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ com a norma $\|\cdot\|_{H^1}$ é completo.

Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy qualquer em $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ e u seu limite em $H^1(\mathbb{R}^N)$, que já sabemos ser completo. Para mostrarmos que $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, basta mostrarmos que u é radial. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para u no sentido de L^2 . Em particular, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, dada uma transformação linear ortogonal $S : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, temos que

$$u(Sx) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(Sx) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$. ■

1.2.1 Aproximação por funções de classe C_c^∞

1.2.1 Aproximação por funções de classe C_c^∞

A Proposição 1.2, ao final desta subseção, fornece um método para reduzir a prova de fatos a respeito de funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$ à prova dos mesmos fatos para funções radiais de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, o que é frequentemente mais fácil de fazer por conta da regularidade que estas últimas apresentam. A sua prova requer alguns preliminares de regularizadores de funções localmente integráveis e aproximação de funções de $H^1(\mathbb{R}^N)$, desenvolvidos ao longo dos sete lemas a seguir. Os mais importantes são os Lemas 1.4, 1.6 e 1.7, a partir dos quais uma prova para a Proposição 1.2 pode ser escrita de forma bem concisa.

Seja $J \in C_c(\mathbb{R}^N)$ qualquer. Notemos que o produto de convolução

$$\begin{aligned} J * u : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} J(x-y)u(y) dy \end{aligned}$$

está bem definido sempre que $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, em quaisquer destes casos, a integral acima se reduz à integral sobre um compacto do produto de uma função contínua e limitada, $y \mapsto J(x-y)$, por outra integrável neste compacto.

Lema 1.1. *Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e $J \in C_c(\mathbb{R}^N)$, então $J * u$ é contínua em \mathbb{R}^N .*

Demonstração. Fixemos arbitrariamente $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R}^N convergente a x_0 . Temos que

$$|(J * u)(x_n) - (J * u)(x_0)| = \int_{\mathbb{R}^N} (J(x_n - y) - J(x_0 - y))u(y) dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pela continuidade de J , temos que

$$(J(x_n - y) - J(x_0 - y))u(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que $|x_n - x_0| < 1$. Escrevendo $K := \text{supp } J$ e $\tilde{K} := \{y \in \mathbb{R}^N; \text{dist}(x_0 - y, K) \leq 1\}$, obtemos

$$|(J(x_n - y) - J(x_0 - y))u(y)| \leq 2 \left(\max_{x \in K} |J(x)| \right) \cdot |u(y)| \cdot \chi_{\tilde{K}}(y)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Como $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, J é contínua e K, \tilde{K} são compactos, o membro direito nesta desigualdade é integrável e segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$|(J * u)(x_n) - (J * u)(x_0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Isto prova a continuidade de $J * u$. ■

1.2.1 Aproximação por funções de classe C_c^∞

Lema 1.2. *Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e $J \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, então $J * u$ também é de classe C^1 em \mathbb{R}^N e $D_j(J * u) = (D_j J) * u$, $j = 1, \dots, N$.*

Demonstração. Mostraremos que $J * u$ tem j -ésima derivada parcial dada por $D_j(J * u) = (D_j J) * u$, $j = 1, \dots, N$. Tendo sido feito isso, o resultado segue pelo Lema 1.1, uma vez que $D_j J$ é contínua e tem suporte compacto por hipótese, $j = 1, \dots, N$.

Denotemos por e_1, \dots, e_N os vetores da base canônica de \mathbb{R}^N e fixemos arbitrariamente $j \in \{1, \dots, N\}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Seja $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência qualquer em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ convergente a 0. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} & \frac{(J * u)(x_0 + t_n e_j) - (J * u)(x_0)}{t_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{J(x_0 + t_n e_j - y) - J(x_0 - y)}{t_n} u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (D_j J)(x_0 + \theta(n)t_n e_j - y) u(y) dy, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Analogamente à demonstração do Lema 1.1, temos que

$$(D_j J)(x_0 + \theta(n)t_n e_j - y) u(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (D_j J)(x_0 - y) u(y), \quad y \in \mathbb{R}^N,$$

e que

$$|(D_j J)(x_0 + \theta(n)t_n e_j - y) u(y)| \leq \left(\max_{x \in K} |(D_j J)(x)| \right) \cdot |u(y)| \cdot \chi_{\tilde{K}}(y)$$

para cada $y \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $J * u$ tem j -ésima derivada parcial no ponto x_0 dada por

$$(D_j(J * u))(x_0) = \int_{\mathbb{R}^N} (D_j J)(x_0 - y) u(y) dy = ((D_j J) * u)(x_0),$$

o que completa a demonstração. ■

Lema 1.3. *Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $J * u$ é de classe C^∞ .*

Demonstração. Pelos Lemas 1.1, 1.2 e por indução, temos $D_\alpha(J * u) = (D_\alpha J) * u$ contínua para cada multi-índice α . ■

Agora suponhamos que $J \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ seja radial, $\text{supp } J = B[0, 1]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} J(x) dx = 1. \tag{1.3}$$

1.2.1 Aproximação por funções de classe C_c^∞

Podemos tomar para J , por exemplo, a função definida por

$$J(x) = \begin{cases} ke^{-1/(1-|x|^2)}, & \text{se } |x| < 1, \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é escolhido de forma que (1.3) seja satisfeita.¹ Para cada $\epsilon > 0$, a Regra da Cadeia e o Teorema de Mudança de Variáveis garantem que a função

$$J_\epsilon : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \epsilon^{-N} J(x/\epsilon) \quad (1.5)$$

está em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp } J_\epsilon = B[0, \epsilon]$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x) dx = 1. \quad (1.6)$$

Lema 1.4. *Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ é radial e J_ϵ é como acima, então $J_\epsilon * u$ é de classe C^∞ e radial em \mathbb{R}^N , qualquer que seja $\epsilon > 0$.*

Demonstração. $J_\epsilon * u$ é de classe C^∞ pelo Lema 1.3.

Agora seja S uma transformação linear ortogonal qualquer de \mathbb{R}^N sobre si mesmo. Então $S^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ também é uma transformação linear ortogonal, a que desfaz a mudança de referencial cartesiano operada por S . Pela Definição 1.2, pela radialidade das funções J_ϵ, u e pelo Teorema de Mudança de Variáveis, temos que

$$\begin{aligned} (J_\epsilon * u)(Sx) &= \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(Sx - y)u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(S^{-1}(Sx - y))u(S^{-1}y) |(S^{-1})'(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x - y)u(y) dy \\ &= (J_\epsilon * u)(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto u é radial. ■

Lema 1.5. *Sejam J_ϵ , $\epsilon > 0$, como no Lema 1.4. Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, então $J_\epsilon * u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|J_\epsilon * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ para cada $\epsilon > 0$, e $J_\epsilon * u \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} u$ em L^p .*

Demonstração. Veja [1, Theorem 2.18 (c), págs. 29–31]. ■

¹Uma forma de mostrar que J é de classe C^1 sem precisar calcular suas derivadas parciais na fronteira da bola unitária explicitamente pela definição é aplicando o Lema 2.10 da Subseção 2.3. Mostra-se por indução que J é, de fato, de classe C^∞ .

1.2.1 Aproximação por funções de classe C_c^∞

Lema 1.6. *Sejam J_ϵ , $\epsilon > 0$, como no Lema 1.4. Se $1 \leq p < \infty$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, então $J_\epsilon * u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ e $J_\epsilon * u \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} u$ em $W^{m,p}$. Além disso, se $\text{supp } u$ é compacto, então $\text{supp}(J_\epsilon * u)$ também é compacto, $\epsilon > 0$.*

Demonstração. Como em [1, Lemma 3.15, pág. 52], mostra-se que $J_\epsilon * u$ tem derivadas fracas

$$D_\alpha(J_\epsilon * u) = J_\epsilon * (D_\alpha u), \quad |\alpha| \leq m, \quad \epsilon > 0.$$

Pelo Lema 1.5, concluímos que $D_\alpha(J_\epsilon * u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $D_\alpha(J_\epsilon * u) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} D_\alpha u$, $|\alpha| \leq m$, $\epsilon > 0$. Portanto $J_\epsilon * u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ para cada $\epsilon > 0$ e $J_\epsilon * u \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} u$ no sentido de $W^{m,p}$.

Notemos que

$$(J_\epsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x-y)u(y) dy = 0$$

sempre que $\text{dist}(x, \text{supp } u) > \epsilon$, quando o integrando é identicamente nulo. Assim, $\text{supp}(J_\epsilon * u) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N; \text{dist}(x, \text{supp } u) \leq \epsilon\}$, que é compacto para cada $\epsilon > 0$. ■

Lema 1.7. *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em H^1 e $\text{supp } u_n$ é compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, então a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser escolhida em $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. (I) Seguindo as idéias da construção de uma partição da unidade em [1, Theorem 3.14, págs. 51–52] usando as funções $J, J_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\epsilon > 0$, dadas por (1.4) e (1.5), podemos construir uma função $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

- (i) $\psi(x) = 1$ sempre que $|x| \leq 1$,
- (ii) $\psi(x) = 0$ sempre que $|x| \geq 2$,
- (iii) existe $M > 0$ tal que $|\psi(x)|, |D_j \psi(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, N$.

Para cada $\epsilon > 0$, seja $\psi_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por $\psi_\epsilon(x) = \psi(\epsilon x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Sejam $u_n := \psi_{\frac{1}{n}} \cdot u$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\text{supp } u_n \subseteq B[0, n]$ é compacto, $\psi_{\frac{1}{n}}(x) = 1$ para $|x| \leq n$ e $|\psi_{\frac{1}{n}}(x)|, |D_j \psi_{\frac{1}{n}}(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}$. Para completar a demonstração basta mostrarmos que $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $n \in \mathbb{N}$, e que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em H^1 .

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, dados quaisquer $j \in \{1, \dots, N\}$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que $\psi_{\frac{1}{n}} \cdot \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, assim,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} D_j u(x)(\psi_{\frac{1}{n}} \cdot \varphi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)(D_j \psi_{\frac{1}{n}}(x)\varphi(x) + \psi_{\frac{1}{n}}(x)D_j \varphi(x)) dx.$$

1.2.2 Existência de representantes contínuos

Portanto u_n tem j -ésima derivada parcial fraca dada por

$$D_j u_n = D_j \psi_{\frac{1}{n}} \cdot u + \psi_{\frac{1}{n}} \cdot D_j u \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Concluimos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está, de fato, em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{H^1}^2 &= \int_{|x| \geq n} (|\nabla(u - u_n)|^2 + |u - u_n|^2) dx \\ &\leq \int_{|x| \geq n} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx + \int_{|x| \geq n} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dx \\ &\leq (1 + M^2) \int_{|x| \geq n} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pois $(|\nabla u|^2 + |u|^2)$ é integrável.

(II) Observemos que ψ pode ser definida de forma que seja radial. Com efeito, seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, como na construção acima, satisfazendo (i)–(iii). Então a função $\hat{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por $\hat{\psi}(x) = \psi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N$, é radial e satisfaz (i)–(iii). Assim, se u é radial, então $u_n \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.2. *Para cada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^1(\mathbb{R}^N) \cap H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em H^1 .*

Demonstração. Pelo Lema 1.7, existe uma sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\text{supp } v_n$ é compacto para cada $n \in \mathbb{N}$ e $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. Pelos Lemas 1.4 e 1.6, existe uma sequência de funções radiais $(w_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $w_k^{(n)} \xrightarrow{k \in \infty} v_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\|w_{k_n}^{(n)} - v_n\|_{H^1} < \|v_n - u\|_{H^1}$ e $u_n = w_{k_n}^{(n)}$. Então $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_n - u\|_{H^1} \leq 2\|v_n - u\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ■

1.2.2 Existência de representantes contínuos

A existência de representantes contínuos exceto, possivelmente, na origem, para as funções $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ decorre diretamente da existência de representantes contínuos exceto, possivelmente, em 0, para as funções f correspondentes. Chegamos a isso mostrando que $f \in H^1((\epsilon, M))$ sempre que $0 < \epsilon < M < \infty$. Dividimos os detalhes técnicos em uma série de lemas. O primeiro passo é mostrar que essas funções f têm derivadas fracas, o que é feito no Lema 1.10.

Lema 1.8. *Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ é uma função radial, então existe $y_0 \in S^{N-1}$ tal que $u(ry) = u(ry_0)$ para quase todo $r > 0$, para quase todo $y \in S^{N-1}$.*

1.2.2 Existência de representantes contínuos

Demonstração. Sejam $D = \{x \in \mathbb{R}^N; u(x) \neq f(|x|)\}$ e

$$D_y = \{r \in [0, \infty); u(ry) \neq f(r)\}, \quad y \in S^{N-1}.$$

Então D_y é mensurável para quase todo $y \in S^{N-1}$ (com respeito à medida de Hausdorff em S^{N-1}) e, redefinindo $D_y = \emptyset$ para cada $y \in S^{N-1}$ tal que o D_y original não seja mensurável, temos que

$$0 = |D| = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_D(x) dx = \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^\infty \chi_{D_y}(r) r^{N-1} dr \right) d\sigma(y),$$

tudo isso pelo Teorema de Integração em Coordenadas Polares [10, Theorem 2.49, págs. 78–79], onde σ é a medida de Hausdorff em S^{N-1} . Portanto

$$\int_0^\infty \chi_{D_y}(r) r^{N-1} dr = 0$$

para quase todo $y \in S^{N-1}$. Segue que $\chi_{D_y}(r) r^{N-1} = 0$, para quase todo $y \in S^{N-1}$, para quase todo $r \in [0, \infty)$, de onde concluímos que $|D_y| = 0$ para quase todo $y \in S^{N-1}$. A conclusão do lema é válida com $y_0 \in S^{N-1}$ qualquer tal que D_{y_0} é mensurável e $|D_{y_0}| = 0$. ■

Lema 1.9. Para cada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, a função

$$\begin{aligned} \hat{u}: \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \end{aligned}$$

é radialmente simétrica. Em particular, existe $y_0 \in S^{N-1}$ tal que $\hat{u}(ry) = \langle \nabla u(ry), y_0 \rangle$ para quase todo $r > 0$, para quase todo $y \in S^{N-1}$.

Demonstração. Dada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, primeiramente notemos que $|\hat{u}(x)| \leq |\nabla u(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Como $|\nabla u(\cdot)| \in L^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, segue que $\hat{u} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em H^1 pela Proposição 1.2. O resultado do lema é válido para cada função nessa sequência. De fato,

$$\left\langle \nabla u_n(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = \sum_{j=1}^N f'_n(|x|) \frac{x_j}{|x|} \cdot \frac{x_j}{|x|} = f'_n(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N},$$

pela Regra da Cadeia. Agora, a convergência $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em H^1 nos garante que, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\nabla u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo

$$\left\langle \nabla u(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(|x|)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, o que completa a prova de que \hat{u} é radial.

A segunda afirmação no enunciado do Lema 1.9 segue diretamente do Lema 1.8. ■

1.2.2 Existência de representantes contínuos

Lema 1.10. *Se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, então f é fracamente diferenciável no intervalo $(0, \infty)$ e tem-se*

$$f'(r) = \langle \nabla u(ry), y \rangle = \langle \nabla u(ry_0), y_0 \rangle ,$$

para quase todo $y \in S^{N-1}$, para quase todo $r > 0$, onde $y_0 \in S^{N-1}$ é dado pelo Lema 1.9.

Demonstração. A escolha do candidato para derivada fraca de f é a mais natural possível. Se u é diferenciável, então podemos escolher o representante para f de forma que seja $f(r) = u(ry)$ para todos $y \in S^{N-1}$, $r > 0$, e obter a igualdade acima ponto a ponto pela Regra da Cadeia.

Precisamos mostrar que

$$\int_0^\infty f(r)\psi'(r) dr = - \int_0^\infty \langle \nabla u(ry_0), y_0 \rangle \psi(r) dr, \quad \psi \in C_c^\infty((0, \infty)). \quad (1.7)$$

Observe que (1.7) é equivalente a

$$\omega_N \int_0^\infty f(r)\psi'(r) dr = -\omega_N \int_0^\infty \langle \nabla u(ry_0), y_0 \rangle \psi(r) dr, \quad \psi \in C_c^\infty((0, \infty)),$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^\infty f(r)\psi'(r) dr \right) d\sigma(y) \\ &= - \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^\infty \langle \nabla u(ry_0), y_0 \rangle \psi(r) dr \right) d\sigma(y), \quad \psi \in C_c^\infty((0, \infty)). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.9, isto é equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^\infty f(r)\psi'(r) dr \right) d\sigma(y) \\ &= - \int_{S^{N-1}} \left(\int_0^\infty \langle \nabla u(ry), y \rangle \psi(r) dr \right) d\sigma(y), \quad \psi \in C_c^\infty((0, \infty)), \end{aligned}$$

o que, pelo Teorema de Integração em Coordenadas Polares, é equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\psi'(|x|)}{|x|^{N-1}} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \frac{\psi(|x|)}{|x|^{N-1}} dx \\ &= - \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_j}(x) \frac{x_j \psi(|x|)}{|x|^N} dx, \quad \psi \in C_c^\infty((0, \infty)), \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_N)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, para verificar (1.7), basta verificarmos (1.8).

1.2.2 Existência de representantes contínuos

Para cada $j \in \{1, \dots, N\}$ e cada $\psi \in C_c^\infty((0, \infty))$, temos que $x \mapsto x_j \psi(|x|) |x|^{-N}$, $x \in \mathbb{R}^N$, está em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j \psi(|x|)}{|x|^N} \right) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u_{x_j}(x) \frac{x_j \psi(|x|)}{|x|^N} dx \quad (1.9)$$

pela definição de derivada fraca e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j \psi(|x|)}{|x|^N} \right) = \frac{\psi(|x|)}{|x|^N} + \frac{x_j^2}{|x|^{N+1}} \psi'(|x|) - N \frac{x_j^2}{|x|^{N+2}} \psi(|x|) \quad (1.10)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Substituindo-se (1.10) em (1.9) e somando-se (1.9) de $j = 1$ até N obtemos (1.8), o que completa a prova do Lema 1.10. ■

Agora relacionamos a derivada fraca de f com o gradiente de u e mostramos que ela está em $L^2((\epsilon, M))$ sempre que $0 < \epsilon < M < \infty$. Isso nos dá um representante contínuo para f , de onde a existência de um representante contínuo para u é imediata.

Lema 1.11. *Se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, então $|\nabla u(x)| = f'(|x|)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Como na demonstração do Lema 1.9 e considerando-se o resultado do Lema 1.10, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\nabla u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla u(x)$ e

$$\left\langle \nabla u_n(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left\langle \nabla u(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = f'(|x|)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Como $\nabla u_n(x) = (f'_n(|x|)/|x|)x$ é paralelo a x para todo $x \neq 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$f'(|x|) = |\nabla u(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla u_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left\langle \nabla u_n(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle \right|$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, o que completa a prova. ■

Lema 1.12. *Se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, então $f \in H^1((\epsilon, M))$ sempre que $0 < \epsilon < M < \infty$. Em particular, existe $\tilde{f} \in C((0, \infty))$ tal que $f(r) = \tilde{f}(r)$ para quase todo $r \in (0, \infty)$.*

Demonstração. Se $0 < \epsilon < M < \infty$, então

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^M (|f(r)|^2 + |f'(r)|^2) dr &\leq \frac{\omega_N}{\omega_N \epsilon^{N-1}} \int_{\epsilon}^M (|f(r)|^2 + |f'(r)|^2) r^{N-1} dr \\ &= \frac{1}{\omega_N \epsilon^{N-1}} \int_{\Omega(\epsilon, M)} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \\ &\leq \frac{1}{\omega_N \epsilon^{N-1}} \|u\|_{H^1}^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

1.3 Decaimento no infinito

portanto $f, f' \in L^2((\epsilon, M))$ e, portanto $f \in H^1((\epsilon, M))$.

A existência de um representante contínuo para f decorre do fato de que funções de $H^1((a, b))$ sempre possuem representantes contínuos, $-\infty < a < b < \infty$ (conferir [7, Teorema VIII.2]). ■

Teorema 1.3. *Para cada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, existe $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ tal que $u(x) = \tilde{u}(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Dada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, sejam \tilde{f} dada pelo Lema 1.12 e $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{u}(x) = \tilde{f}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N - \{0\}$, $u(0) = 0$. Então \tilde{u} é contínua exceto, possivelmente, em $x = 0$ e $\tilde{u}(x) = \tilde{f}(|x|) = u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. ■

Alguns leitores familiares com a prova da existência de representantes contínuos para funções de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ baseada na Desigualdade de Strauss—em que se obtém, na verdade, que funções de $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ possuem representantes Hölder-contínuos com expoente $1/2$ (conferir [14, §6.1, Lemme 1.1])—podem considerar nossa abordagem para provar este fato desnecessariamente longa. Nossos motivos ficam mais claros na próxima seção, onde a Desigualdade de Strauss e algumas de suas consequências são discutidas.

1.3 Decaimento no infinito

Proposição 1.3 (Desigualdades de Strauss e Lions). *Seja $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ qualquer. Então existe uma constante dependendo apenas de N , $c(N) > 0$, tal que*

- (a) $|u(x)| \leq c(N) |x|^{(1-N)/2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ e
- (b) $|u(x)| \leq c(N) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1/2} |x|^{(1-N)/2}$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Dada qualquer $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\begin{aligned}
 |u(x)|^2 &= |f(|x|)|^2 \\
 &= - \int_{|x|}^{\infty} 2f'(s)f(s) ds \\
 &\leq \int_{|x|}^{\infty} s^{-(N-1)} 2|f'(s)||f(s)| s^{N-1} ds \\
 &\leq |x|^{1-N} \int_{|x|}^{\infty} (|f(s)|^2 + |f'(s)|^2) s^{N-1} ds \\
 &\leq |x|^{1-N} \omega_N^{-1} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2, \quad x \in \mathbb{R}^N,
 \end{aligned}$$

1.3 Decaimento no infinito

onde $\omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ é a área da esfera unitária de \mathbb{R}^N . Isto prova a desigualdade (a) para as funções radialmente simétricas de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $c_1(N) = \omega_N^{-1/2}$. Em particular, $s \mapsto f(s)s^{(N-1)/2}$ e $s \mapsto f'(s)s^{(N-1)/2}$ estão em $L^2([r, \infty))$, $r \geq 0$, pela última desigualdade na sucessão acima. Segue pela Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq 2 \int_{|x|}^{\infty} |f'(s)| |f(s)| ds \\ &\leq 2 \left(\int_{|x|}^{\infty} |f'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{|x|}^{\infty} |f(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq 2 |x|^{1-N} \left(\int_{|x|}^{\infty} |f'(s)|^2 s^{N-1} ds \right)^{1/2} \left(\int_{|x|}^{\infty} |f(s)|^2 s^{N-1} ds \right)^{1/2} \\ &\leq 2\omega_N^{-1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} |x|^{1-N}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Isto prova a desigualdade (b) para as funções radialmente simétricas de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $c_2(N) = (2/\omega_N)^{1/2}$.

Dada, agora, qualquer $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, a Proposição 1.2 garante a existência de uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções radialmente simétricas de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que converge em H^1 para u . Em particular, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em L^2 , assim, passando-se a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x)| &= |u(x)| \\ &\leq c_1(N) |x|^{(1-N)/2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_1(N) |x|^{(1-N)/2} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, provando a desigualdade (a). Também $|\nabla u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\nabla u|$ em L^2 , daí a desigualdade (b) é válida por argumento análogo. ■

As provas que apresentaríamos para as duas consequências imediatas da Desigualdade de Strauss apresentadas abaixo não seriam diferentes das que podem ser encontradas no texto de Kavian [14], portanto enunciamos os resultados sem demonstração. Entretanto há algo que deve ser observado a respeito da prova do Corolário 2 encontrada na segunda parte da demonstração de [14, Chapitre 6, Lemme 1.1]. Kavian se propõe a mostrar que uma dada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ possui um representante contínuo exceto, possivelmente, na origem, mostrando diretamente que u é Hölder contínua com expoente 1/2 em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Entretanto, durante a prova, ao escrever

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{|y|}^{|x|} |f'(s)| ds,$$

1.3 Decaimento no infinito

Kavian estaria supondo implicitamente que f é fracamente diferenciável e que f é uma primitiva para f' . Ora, se já soubéssemos disso, então já saberíamos que f é contínua fora da origem e, portanto, que u é contínua fora da origem, o que é um dos objetivos de [14, Chapitre 6, Lemme 1.1]. Sendo assim, para provar que u é Hölder contínua de expoente $1/2$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ devemos, primeiramente, provar que f é fracamente diferenciável em $(0, \infty)$ e que f é uma primitiva para f' . Uma justificativa completa do Corolário 2 deve considerar, portanto, propriedades de funções de $H^1((a, b))$, $-\infty < a < b < \infty$, [7, Teorema VIII.2] e as conclusões dos Lemas 1.11 e 1.12, o que não é feito em [14].

Corolário 1 (Teorema de Strauss). *As imersões $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ são compactas para $2 < p < 2N/(N - 2) =: 2^*$.*

Demonstração. Conferir [14, 1.2 Théorème] para uma demonstração via Desigualdade de Strauss (Proposição 1.3, item (a)), explorando diretamente a radialidade das funções, ou o Corolário 2 do Teorema 3.2 na Seção 3.2 para uma abordagem mais algébrica e geral. ■

Corolário 2. *Para cada $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, existe $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ tal que $u(x) = \tilde{u}(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{u} \in C^{0,1/2}(\mathbb{R}^N \setminus B(0, \epsilon))$ para cada $\epsilon > 0$.*

Demonstração. Ver a segunda parte da demonstração de [14, 1.1 Lemme] levando em conta [7, Teorema VIII.2] e os Lemas 1.11 e 1.12. ■

Capítulo 2

O Problema

$$-\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \text{ em } \mathbb{R}^N$$

Neste capítulo seguimos as idéias de Bartsch & Willem [4] para estabelecer a existência de infinitas soluções radiais nodais para o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $N \geq 2$ e b, f são funções reais satisfazendo

(b_0) $b \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ e existe uma constante real $a_0 > 0$ tal que $b \geq a_0$;

(f_1) $f \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem constantes reais $a_1, s, R_1 > 0$ tais que

$$|f(r, u)| \leq a_1 |u|^s, \quad r \geq 0, |u| \geq R_1;$$

aqui, $1 < s < (N + 2)/(N - 2)$, se $N \geq 3$, e $1 < s < \infty$, se $N = 2$;

(f_2) Existe uma constante real $\mu > 2$ tal que

$$\mu F(r, u) \leq uf(r, u), \quad r \geq 0,$$

onde

$$F(r, u) := \int_0^u f(r, v) dv, \quad r \geq 0, u \in \mathbb{R};$$

(f_3) $\lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{\substack{r > 0 \\ |u| \geq K}} F(r, u) > 0$;

(f_4) $f(r, u) = o(|u|)$ quando $u \rightarrow 0$ uniformemente em r , ou seja, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(r, u)| < \epsilon |u|, \quad |u| \leq \delta, r \geq 0;$$

O Problema $-\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u)$ em \mathbb{R}^N

(f₅) Para cada $r \geq 0$, a função $u \mapsto f(r, u)/|u|$, $u \in \mathbb{R} - \{0\}$, é estritamente crescente.

Mais especificamente, provamos o

Teorema 2.1. *Suponhamos que $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, que b, f sejam funções reais satisfazendo (b₀) e (f₁)–(f₅), e que k seja um inteiro não-negativo. Então existem duas soluções radiais u_k^+ e u_k^- para o problema (2.1) satisfazendo $u_k^-(0) < 0 < u_k^+(0)$ e com exatamente k nós $\rho_1^\pm, \dots, \rho_k^\pm$, onde $0 < \rho_1^\pm < \dots < \rho_k^\pm < \infty$:*

$$(u_k^\pm)^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| = \rho_j^\pm \text{ para algum } j = 1, \dots, k\}.$$

Além disso, u_k^+ e u_k^- são soluções clássicas, ou seja, de classe C^2 .

Na **Seção 2.1**, encontramos soluções radiais positivas e negativas para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2.2)$$

no domínio radialmente simétrico

$$\Omega := \Omega(\rho, \sigma) := \text{int}\{x \in \mathbb{R}^N; \rho \leq |x| < \sigma\},$$

onde ρ e σ são fixados arbitrariamente satisfazendo $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$. Na **Subseção 2.1.1**, usamos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz [3] para obter soluções não-triviais para uma modificação apropriada do problema (2.2), a saber, o problema (2.3). A variedade de Nehari é introduzida na **Subseção 2.1.2**, onde provamos que a energia $\lambda^+ = \lambda^+(\rho, \sigma)$ das soluções dadas pelo Teorema do Passo da Montanha é o ínfimo na variedade de Nehari do funcional associado ao problema (2.3). Lançando mão de um lema de deformação devido a Willem, da Teoria de Regularidade de Soluções e de um Princípio de Máximo, mostramos na **Subseção 2.1.3** como obter uma solução positiva a partir da solução não-trivial encontrada em 2.1.1. O resultado do trabalho desenvolvido na Seção 2.1 é resumido na Proposição 2.1 da **Subseção 2.1.4**, onde também explicamos brevemente como uma solução negativa para o problema (2.2) pode ser obtida.

Em seguida, na **Seção 2.2**, estudamos algumas propriedades qualitativas dos valores críticos $\lambda^\pm = \lambda^\pm(\rho, \sigma)$. A Proposição 2.3 deste trabalho corresponde ao item (d) de [4, Proposition 4.1, págs. 269–271] mas nossa abordagem para prová-la é diferente. Na realidade acreditamos que a prova dada por Bartsch & Willem não é válida, uma vez que todo o argumento decorre de uma mudança de variáveis calculada incorretamente na página 271 do artigo supracitado. As propriedades qualitativas de λ^\pm são usadas na **Seção 2.3** para definir um candidato a solução nodal do problema (2.1).

2.1 Soluções em domínios radialmente simétricos

A idéia é concatenar soluções como as obtidas na Seção 2.1 alternando entre soluções positivas e negativas e escolhendo-se os nós de forma que a soma das energias de cada solução seja a mínima possível. Algumas observações a respeito do comportamento da energia de uma solução nodal de (2.1) com respeito ao número de nós são feitas na **Seção 2.4**. Encerramos o capítulo na **Seção 2.5** mostrando que as soluções fracas em domínios radialmente simétricos obtidas na Seção 2.1 são clássicas. Juntamente com o argumento de colagem desenvolvido na Seção 2.3, isto completa a prova de que as soluções radiais fracas obtidas para o problema (2.1) são, de fato, clássicas.

2.1 Soluções em domínios radialmente simétricos

Para obtermos uma solução positiva, substituímos f em (2.2) pela função (contínua e ímpar em u)

$$g^+ : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, u) \longmapsto \begin{cases} f(r, u), & \text{se } u \geq 0 \\ -f(r, -u), & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

e consideramos o problema resultante

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = g^+(|x|, u) \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.3)$$

O ponto é que, se u é uma solução positiva de (2.3), então $g(|x|, u(x)) = f(|x|, u(x))$ para todo $x \in \Omega$, logo u é uma solução positiva de (2.2). Assim nos basta obter uma solução positiva para (2.3). Uma solução negativa para (2.2) pode ser obtida por um argumento análogo, que iremos indicar mais adiante, usando uma função auxiliar g^- , construída de modo parecido. Por simplicidade de notação, escrevemos $g = g^+$ e, da mesma forma, G no lugar de G^+ para a primitiva (par em u) de g^+ com respeito a u :

$$G(r, u) := G^+(r, u) := \int_0^u g(r, v) dv, \quad r \geq 0, u \in \mathbb{R}.$$

Mostramos no Apêndice B, Seção B.1, que g e G também satisfazem as hipóteses (f_1) – (f_5) . Na próxima subseção iremos aplicar o Teorema do Passo da Montanha para provar a existência de uma solução não-trivial para o problema (2.3). Para tanto, precisamos de um funcional de classe C^1 apropriado definido em um espaço de Banach adequado.

Seja $H_{0,rad}^1(\Omega)$ o espaço (de Hilbert) das funções radiais de $H_0^1(\Omega)$ com a norma usual $\|\cdot\|_{H^1} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{1/2}, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

2.1.1 Existência de uma solução não-trivial

(basta aplicar a Proposição 3.1 com $G = O(N)$). Seja $X = X(\rho, \sigma)$ o conjunto das funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2 \right) dx < \infty.$$

A aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad u \in X,$$

é uma norma em X segundo a qual X é um espaço de Hilbert (conferir Proposição B.1). Por fim, denotemos por $E = E(\rho, \sigma)$ o subespaço de X das funções radiais. Como observado no item (c) da Definição 3.3 e pelo Exemplo 3.1, E é um subespaço fechado de X , logo é um espaço de Hilbert.

Notemos que, em virtude de (b_0) ,

$$\|u\|^2 \geq \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + a_0 u^2 \right) dx \geq \frac{a_0}{1 + a_0} \|u\|_{H^1}^2.$$

Portanto E está imerso continuamente em $H_{0,rad}^1(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema da Imersão de Sobolev (conferir Teorema A.2), X está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para cada $p \in [2, 2^*]$, se $N \geq 3$, e para cada $p \in [2, 2^*)$, se $N = 2$, onde

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 2 \end{cases}$$

é o expoente crítico de Sobolev. Segue que E está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ e, como estas imersões são lineares (de fato, são aplicações identidade nos espaços correspondentes), existe um $C(p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C(p) \|u\|, \quad u \in E, \quad 2 \leq p < 2^*, \quad (2.4)$$

$$\|u\|_{L^{2^*}} \leq C(2^*) \|u\|, \quad u \in E, \quad N \neq 2. \quad (2.5)$$

2.1.1 Existência de uma solução não-trivial

Mostramos no Apêndice B, Seção B.4, que o funcional

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2 \right) dx - \int_{\Omega} G(|x|, u) dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

está bem definido, é de classe C^1 e seus pontos críticos são soluções fracas de (2.3). Para encontrar um ponto crítico não-trivial de φ aplicamos o Teorema do Passo da Montanha à restrição de φ ao subespaço E de X e, em seguida, usamos o Princípio da Criticalidade Simétrica para concluir que o ponto crítico encontrado para $\varphi|_E$ é um ponto crítico de φ (conferir Seção 3.3, especialmente o Teorema 3.3 e seu Corolário).

2.1.1 Existência de uma solução não-trivial

Lema 2.1. *O funcional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a geometria do passo da montanha (condições (a)–(c) no Teorema do Passo da Montanha, Teorema B.1), ou seja,*

- (a) $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\varphi(0) = 0$;
- (b) *Existem $r_0, c_0 > 0$ tais que $\varphi(u) \geq c_0$ sempre que $\|u\| = r_0$;*
- (c) *Para todo $u \in X - \{0\}$, existe $t_0 = t_0(u) > 0$ tal que $\varphi(tu) < 0$ para todo $t \geq t_0$;*

Demonstração. (a) Já sabemos que $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Para ver que $\varphi(0) = 0$, basta notarmos que $G(r, 0) = 0$ para todo $r \geq 0$ e calcular $\varphi(0)$ diretamente usando sua definição em (2.6).

(b) Para cada $u \in X$ e cada $\epsilon > 0$, o Lema B.2 nos dá uma constante $A = A(a_0\epsilon/2) > 0$ (dependendo apenas de ϵ) tal que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} G(|x|, u(x)) dx \right| &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{a_0\epsilon}{2} |u(x)|^2 + A |u(x)|^{s+1} \right) dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} b(|x|) |u(x)|^2 dx + A \int_{\Omega} |u(x)|^{s+1} dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|^2 + A \|u\|_{L^{s+1}}^{s+1} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|^2 + \tilde{A} \|u\|^{s+1}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{A} = A(C(s+1))^{s+1} > 0$ e $C(s+1)$ é dada por (2.4). Assim, se

$$\|u\| \leq \left(\frac{\epsilon}{2\tilde{A}} \right)^{\frac{1}{s-1}},$$

então

$$\left| \int_{\Omega} G(|x|, u(x)) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \|u\|^2 + \tilde{A} \left(\frac{\epsilon}{2\tilde{A}} \right)^{\frac{s-1}{s-1}} \|u\|^2 = \epsilon \|u\|^2,$$

logo

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \left| \int_{\Omega} G(|x|, u(x)) dx \right| \geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) \|u\|^2.$$

Tomando qualquer $\epsilon \in (0, 1/2)$, a desigualdade acima nos dá $\varphi(u) \geq c_0$ sempre que $\|u\| = r_0$ para

$$r_0 = \left(\frac{\epsilon}{2\tilde{A}} \right)^{\frac{1}{s-1}} > 0 \quad \text{e} \quad c_0 = \left(\frac{1}{2} - \epsilon \right) r_0^2 > 0.$$

2.1.1 Existência de uma solução não-trivial

(c) Aqui, usamos o Lema B.3. Se $u \in X - \{0\}$ e $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}\varphi(tu) &= \frac{1}{2} \|tu\|^2 - \int_{\Omega} G(|x|, tu(x)) \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 t^2 - \int_{\Omega} \left(C_1 |tu(x)|^\mu - C_2 |tu(x)|^2 \right) \, dx \\ &\leq t^2 \left[\left(\frac{1}{2} + C_2(C(2))^2 \right) \|u\|^2 \right] - t^\mu \left[C_1 \int_{\Omega} |u(x)|^\mu \, dx \right].\end{aligned}$$

Mas como $u \neq 0$, devemos ter

$$\int_{\Omega} |u(x)|^\mu \, dx > 0,$$

daí $\varphi(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$, uma vez que $\mu > 2$. Em particular, existe $t_0 = t_0(u) > 0$ tal que $\varphi(tu) < 0$ para todo $t \geq t_0$. ■

Lema 2.2. *O funcional $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, o funcional φ restrito ao subespaço E , satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência qualquer em E tal que $\varphi(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \in \mathbb{R}$ e $\varphi'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos, por (f_2) , que

$$\begin{aligned}c + 1 + \|u_n\| &\geq \varphi(u_n) + \frac{\|\varphi'(u_n)\|_{E'}}{\mu} \|u_n\| \\ &\geq \varphi(u_n) - \frac{1}{\mu} \langle \varphi'(u_n), u_n \rangle \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} g(|x|, u_n) u_n - G(|x|, u_n) \right) \, dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2.\end{aligned}$$

Como $\mu > 2$, isto significa que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E . Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que $u_n \rightharpoonup u \in E$.

Para provar que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em E ao longo de alguma subsequência, começamos escrevendo

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|^2 &= \|u_n\|^2 - 2 \int_{\Omega} (\nabla u_n \cdot \nabla u + b(|x|)u_n u) \, dx + \|u\|^2 \\ &= \langle \varphi'(u_n), u_n - u \rangle - \langle \varphi'(u), u_n - u \rangle \\ &\quad + \int_{\Omega} (g(|x|, u_n) - g(|x|, u)) (u_n - u) \, dx\end{aligned}$$

2.1.1 Existência de uma solução não-trivial

para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$|\langle \varphi'(u_n), u_n - u \rangle| \leq \|\varphi'(u_n)\|_{E'} \|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pois $\varphi'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, e que $\langle \varphi'(u), u_n - u \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pela convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$. Nos resta mostrar que a integral acima também tende a zero quando n tende a infinito.

Colocando $u(x) = 0$ sempre que $|x| \leq \rho$ e para cada $u \in E$, obtemos uma imersão contínua de E em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Corolário 1 da Proposição 1.3, $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$. Concluimos que $E \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente para $2 < p < 2^*$. Assim, segue pelo Lema B.2 e pela Desigualdade de Hölder que, dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (g(|x|, u_n) - g(|x|, u))(u_n - u) dx \right| \\ & \leq \epsilon \int_{\Omega} (|u_n| + |u|)^2 dx + A \int_{\Omega} (|u_n|^s + |u|^s) |u_n - u| dx \\ & \leq \epsilon (\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})^2 \\ & \quad + A (\|u_n\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s + \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s) \|u_n - u\|_{L^{s+1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $A = (s+1)A(\epsilon/2)$. Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em E e E está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para $2 \leq p < 2^*$, concluimos que os termos

$$(\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})^2 \quad \text{e} \quad A(\|u_n\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s + \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s)$$

na expressão acima estão limitados superiormente independentemente de $n \in \mathbb{N}$ para cada $\epsilon > 0$ fixado arbitrariamente. E como a imersão $E \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$ é compacta, passando-se a uma subsequência, se necessário, e levando em conta o Teorema A.1, podemos supor que $\|u_n - u\|_{L^{s+1}(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Com isto concluimos que

$$\int_{\Omega} (g(|x|, u_n) - g(|x|, u))(u_n - u) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

completando a demonstração da verificação da condição de Palais-Smale para o funcional $\varphi|_E$. ■

Observação. Notemos que a conclusão do Lema 2.2 também é válida se E é substituído por qualquer subespaço F de X tal que a imersão $F \hookrightarrow L^p(\Omega)$ seja compacta para $2 < p < 2^*$.

Combinando-se os Lemas 2.1 e 2.3, segue pelo Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz (Teorema B.1) que

$$c = c^+(\rho, \sigma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

2.1.2 A variedade de Nehari

é um valor crítico de $\varphi|_E$, onde

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma^+(\rho, \sigma) \\ &:= \{\gamma \in C([0, 1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) \notin \overline{B(0, r_0)} \text{ e } \varphi(\gamma(1)) < 0\}.\end{aligned}$$

Como $c > 0$, qualquer ponto crítico $u \in E$ associado a c é não-nulo, ou seja, é uma solução fraca não-trivial do problema (2.3). E pelo Princípio da Criticalidade Simétrica (conferir o Corolário do Teorema 3.3), qualquer ponto crítico $u \in E$ de $\varphi|_E$ é ponto crítico de $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Agora que temos uma solução não-trivial para o problema (2.3), nosso objetivo é mostrar que podemos supor que ela seja positiva. Mais especificamente, provaremos que existe uma solução positiva cuja energia também é c . Primeiramente precisamos descrever o valor crítico c como o ínfimo de φ sobre uma certa variedade, conhecida como variedade de Nehari.

2.1.2 A variedade de Nehari

Definamos

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^+(\rho, \sigma) := \{u \in E; \langle \varphi'(u), u \rangle = 0\}.$$

Esse conjunto, que é homeomorfo à esfera unitária $\|u\| = 1$ de E , é conhecido como variedade de Nehari.

Nesta subseção mostramos que

$$\lambda = \lambda^+(\rho, \sigma) := \inf_{u \in \mathcal{N}} \varphi(u)$$

é finito e vale $\lambda = c$. Este fato será usado na próxima subseção para mostrar que (2.3) possui soluções positivas e, portanto, (2.2) também possui soluções positivas. Começamos estabelecendo o homeomorfismo entre \mathcal{N} e a esfera unitária $\|u\| = 1$ de E mencionado pouco acima. A prova é dividida nos dois lemas a seguir.

Lema 2.3. *Para cada $u \in E - \{0\}$, existe um único $t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}$. O máximo de $\varphi(tu)$, $t \in [0, \infty)$, existe e é atingido apenas em $t = t(u)$.*

Demonstração. Fixemos arbitrariamente $u \in E - \{0\}$ e definamos

$$\begin{aligned}h_u : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(tu).\end{aligned}$$

Temos

$$h'_u(t) = \langle \varphi'(tu), u \rangle = \frac{1}{t} \langle \varphi'(tu), tu \rangle, \quad t > 0,$$

pela Regra da Cadeia. Portanto $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se $h'_u(t) = 0$. Temos ainda que $h_u(0) = \varphi(0) = 0$, a demonstração do item (b) do Lema 2.1 nos

2.1.2 A variedade de Nehari

permite concluir que $h_u(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e o item (c) do mesmo lema nos diz que $h_u(t) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande. Como h_u é contínua, isso significa que h_u atinge um máximo absoluto em um ponto $t(u) > 0$, em que $h'_u(t(u)) = 0$ e, portanto, $t(u)u \in \mathcal{N}$. Por outro lado,

$$\langle \varphi'(tu), u \rangle = t \|u\|^2 - \int_{\Omega} g(|x|, tu(x))u(x) dx, \quad t \in [0, \infty),$$

$h_u(0) = 0$ e $0 \notin \mathcal{N}$. Daí $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se

$$\|u\|^2 = \frac{1}{t} \int_{\Omega} g(|x|, tu(x))u(x) dx. \quad (2.7)$$

Agora, sendo $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, temos que

$$\frac{1}{t} \int_{\Omega} g(|x|, tu(x))u(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\tilde{\Omega}} \frac{g(|x|, tu(x))}{tu(x)} |u(x)|^2 dx$$

é estritamente crescente em $t > 0$ pela hipótese (f_5) , pois $|\tilde{\Omega}| > 0$, do contrário seria $u = 0$. Portanto a igualdade em (2.7) ocorre para no máximo um valor de $t > 0$. Isto completa a prova de que $t(u)$ é o único número positivo tal que $t(u)u \in \mathcal{N}$ e, além disso,

$$\max_{t \in [0, \infty)} \varphi(tu) = \varphi(t(u)u),$$

completando a demonstração. ■

Lema 2.4. *A aplicação $u \mapsto t(u) \in (0, \infty)$, $u \in E - \{0\}$, dada pelo Lema 2.3, é contínua; conseqüentemente, $u \mapsto t(u)u$, $\|u\| = 1$, é um homeomorfismo entre a esfera unitária de E e \mathcal{N} .*

Demonstração. (I) Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência qualquer em $E - \{0\}$ convergente a $u \in E - \{0\}$. Sendo uma seqüência convergente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em E . Por (2.7), (f_2) e pelo Lema B.3, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \frac{1}{(t(u_n))^2} \int_{\Omega} g(|x|, t(u_n)u_n(x))t(u_n)u_n(x) dx \\ &\geq \frac{\mu}{(t(u_n))^2} \int_{\Omega} G(|x|, t(u_n)u_n(x)) dx \\ &\geq \frac{\mu}{(t(u_n))^2} \int_{\Omega} \left(C_1 |t(u_n)u_n(x)|^{\mu} - C_2 |t(u_n)u_n(x)|^2 \right) dx \\ &\geq \mu C_1 (t(u_n))^{\mu-2} \int_{\Omega} |u_n(x)|^{\mu} dx - \mu C_2 (C(2))^2 \|u_n\|^2, \end{aligned}$$

2.1.2 A variedade de Nehari

portanto

$$(t(u_n))^{\mu-2} \tilde{C}_1 \int_{\Omega} |u_n(x)|^{\mu} dx \leq \tilde{C}_2 \|u_n\|^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

onde

$$\tilde{C}_1 = \mu C_1 > 0 \quad \text{e} \quad \tilde{C}_2 = (1 + \mu C_2 (C(2))^2) > 0.$$

Notemos que, como $t(u_n) > 0$, a estimativa (2.8) nos permite concluir que $u_n \in L^{\mu}(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim podemos denotar a integral nessa estimativa por $\|u_n\|_{L^{\mu}}^{\mu}$. Supomos, por enquanto, a afirmação a seguir.

Afirmação 1. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^{\mu}}^{\mu} \geq \epsilon_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Segue, então, por (2.8), que

$$(t(u_n))^{\mu-2} \leq \frac{\tilde{C}_2}{\epsilon_0 \tilde{C}_1} \|u_n\|^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mu > 2$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em E , essa desigualdade nos permite concluir que $(t(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, digamos, por T_0 .

(II) Consideremos uma subsequência qualquer de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, por simplicidade de notação, a denotemos por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também. Como $t(u_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $(t(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente também. Combinando com o que fizemos em (I) e passando a uma subsequência, se necessário, agora podemos supor que $(t(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um certo $t_0 \in \mathbb{R}$. Suponhamos, para o momento, que a afirmação a seguir seja verdadeira.

Afirmação 2. $t_0 > 0$.

Notemos que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $L^2(\Omega)$ e em $L^{s+1}(\Omega)$ devido à imersão contínua de E em cada um desses espaços. Conseqüentemente, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ para quase todo ponto $x \in \Omega$ e que existem $h_2 \in L^2(\Omega)$ e $h_{s+1} \in L^{s+1}(\Omega)$ tais que $|u_n(x)| \leq h_2(x)$ e $|u_n(x)| \leq h_{s+1}(x)$ para quase todo ponto $x \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\begin{aligned} |g(|x|, t(u_n)u_n(x))u_n(x)| &\leq 2t(u_n) |u_n(x)|^2 + A(1)(s+1)(t(u_n))^s |u_n(x)|^{s+1} \\ &\leq 2T_0(h_2(x))^2 + A(1)(s+1)T_0^s(h_{s+1}(x))^{s+1} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo ponto $x \in \Omega$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue a (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t(u_n)} \int_{\Omega} g(|x|, t(u_n)u_n(x))u_n(x) dx \\ &= \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g(|x|, t(u_n)u_n(x))u_n(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} g(|x|, t_0 u(x))u(x) dx. \end{aligned}$$

2.1.2 A variedade de Nehari

Portanto $t_0 = t(u)$, logo, de fato, $t(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t(u)$.

(III) Resumindo, em (II) provamos que qualquer subsequência da sequência dada $(t(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente a $t(u)$. Consequentemente, a sequência original $(t(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ já deve ser convergente a $t(u)$. Isto prova a continuidade da aplicação $u \mapsto t(u)$, $u \in E - \{0\}$, definida pelo Lema 2.3.

Dessa forma também garantimos a continuidade de $u \mapsto t(u)u$, $\|u\| = 1$. Como esta é simplesmente a inversa da retração $u \mapsto u/\|u\|$, $u \in \mathcal{N}$, concluímos que se trata de um homeomorfismo entre a esfera unitária $\|u\| = 1$ de E e a variedade de Nehari \mathcal{N} . A verificação das Afirmações 1 e 2 logo abaixo completam a demonstração do Lema 2.4. ■

Verificação da Afirmação 1. Suponhamos, ao contrário, que não exista um tal $\epsilon_0 > 0$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\|u_n\|_{L^\mu}^\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ou seja, que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $L^\mu(\Omega)$. Assim, passando novamente a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para quase todo ponto } x \in \Omega. \quad (2.9)$$

Por outro lado, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \in E - \{0\} \subseteq L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Daí, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x) \quad \text{para quase todo ponto } x \in \Omega. \quad (2.10)$$

Combinando (2.9) e (2.10) concluímos que $u(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \Omega$ e, assim, que $u = 0$ em E . Mas isso é uma contradição com a hipótese de que $u \in E - \{0\}$ e, portanto, $u \neq 0$. ◆

Verificação da Afirmação 2. Pelo Lema B.2, existe $A = A(a_0/4) > 0$ tal que

$$|g(|x|, u_n(x))| \leq (a_0/2) |u_n(x)| + (s+1)A |u_n(x)|^s, \quad x \in \Omega.$$

Por (2.7), temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \left| \frac{1}{t(u_n)} \int_{\Omega} g(|x|, t(u_n)u_n(x))u_n(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{t(u_n)} \int_{\Omega} \left(t(u_n)(a_0/2) |u_n(x)|^2 + (t(u_n))^s (s+1)A |u_n(x)|^{s+1} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_n\|^2 + (t(u_n))^{s-1} \tilde{C}_3 \|u_n\|^{s+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_3 = (s+1)A(C(s+1))^{s+1} > 0$. Portanto

$$(t(u_n))^{s-1} \geq (2\tilde{C}_3)^{-1} \|u_n\|^{1-s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $s > 1$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em E , isso significa que $(t(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ está limitada inferiormente por uma constante positiva. Segue que o limite t_0 de $t(u_n)$ quando n tende a infinito é maior que 0. ◆

2.1.2 A variedade de Nehari

Além de ser homeomorfa à esfera unitária de E , a variedade de Nehari está longe da origem. Mais precisamente, temos que

$$\|u\|^2 = \left| \int_{\Omega} ug(|x|, u) dx \right| \leq \bar{C} \|u\|^{s+1}, \quad u \in \mathcal{N},$$

para alguma constante $\bar{C} > 0$ obtida via estimativas no Lema B.2 e imersões de Sobolev. Como $s > 1$, isso quer dizer que

$$\|u\| \geq (1/\bar{C})^{1/(s-1)} > 0, \quad u \in \mathcal{N}.$$

Motivados pelos Lemas 2.3 e 2.4, definimos

$$d = d^+(\rho, \sigma) := \inf_{u \in E - \{0\}} \max_{t \geq 0} \varphi(tu).$$

Lema 2.5. $\lambda^+(\rho, \sigma) = c^+(\rho, \sigma) = d^+(\rho, \sigma)$.

Demonstração. ($\lambda = d$) Pelo Lema 2.3, fica claro que $\lambda \leq d$, pois os máximos na definição de d sempre ocorrem em pontos de \mathcal{N} . Reciprocamente, $d \leq \lambda$. Com efeito, dado $u \in \mathcal{N}$, temos que

$$\varphi(u) = \max_{t \geq 0} \varphi(tu).$$

($c \leq d$) Para cada $u \in E - \{0\}$, temos que $\varphi(tu) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande pelo Lema 2.1. Fixemos arbitrariamente $t_0 > 0$ suficientemente grande para que isso ocorra e seja, também, $\|t_0u\| > r_0$. Seja $\gamma \in C([0, 1], E)$ tal que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = t_0u$ e sua imagem é o segmento de reta unindo estes dois pontos. Então $\gamma \in \Gamma$ e

$$\max_{t \geq 0} \varphi(tu) = \max_{s \in [0, 1]} \varphi(\gamma(s)).$$

Concluimos que $c \leq d$.

($c \geq \lambda$) A idéia é mostrar que cada caminho $\gamma \in \Gamma$ deve cruzar a variedade de Nehari. Nesse caso, temos

$$\max_{t \in [0, 1]} \varphi(\gamma(t)) \geq \inf_{u \in \mathcal{N}} \varphi(u), \quad \gamma \in \Gamma,$$

de onde segue que $c \geq \lambda$.

Dada $u \in E \setminus \{0\}$ qualquer, temos que $h_u(0) = 0$ e $h'_u(t) \geq 0$, $0 < t < t(u)$, onde h_u é definida como na demonstração do Lema 2.3. Portanto $h_u(t) = \varphi(tu) \geq 0$, $0 \leq t \leq t(u)$.

Agora suponhamos, ao contrário, que exista uma $\gamma \in \Gamma$ que não cruza a variedade de Nehari, ou seja, tal que $\gamma(s) \notin \mathcal{N}$ para cada $s \in [0, 1]$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma(s) \neq 0$ para cada $s \in (0, 1]$. Pela definição de Γ , temos que $\varphi(\gamma(1)) < 0$. Por outro lado, $t(\gamma(s)) \neq 1$

2.1.3 Existência de uma solução positiva

para cada $s \in (0, 1]$ e $t(\gamma(s)) > 1$ para $s > 0$ suficientemente pequeno pois, como observado antes do enunciado do lema, o complementar da variedade de Nehari contém uma bola de centro na origem e raio positivo. Por continuidade, concluímos que $t(\gamma(s)) > 1$ para cada $s \in (0, 1]$. Segue pelo parágrafo anterior que $\varphi(\gamma(1)) \geq 0$, uma contradição. Portanto cada $\gamma \in \Gamma$ deve cruzar a variedade de Nehari. ■

Em particular, λ é um valor crítico não-trivial de φ .

2.1.3 Existência de uma solução positiva

Com o próximo lema obteremos uma solução não-negativa para (2.3). Usando um princípio de máximo, mostraremos que essa solução é, de fato, positiva.

Lema 2.6. *Se $u_0 \in \mathcal{N}$ e $\varphi(u_0) = \lambda$, então u_0 é um ponto crítico de φ .*

Demonstração. Suponhamos que sejam $u_0 \in \mathcal{N}$ e $\varphi(u_0) = \lambda$ mas $\varphi'(u_0) \neq 0$. Pela continuidade de φ' , existem $\delta, r > 0$ tais que

$$\|u - u_0\| \leq 4\delta \Rightarrow \|\varphi'(u)\|_{E'} \geq r.$$

Diminuindo $\delta > 0$, se necessário, podemos supor que $0 \notin \overline{B(u_0, 4\delta)}$. Tomemos $I = \varphi$, $S = B(u_0, 2\delta)$, $c = \lambda$ e $\epsilon = \min\{\lambda/2, \delta r/8\}$ no Lema B.9. Então

$$u \in \varphi^{-1}([\lambda - 2\epsilon, \lambda + 2\epsilon]) \cap \overline{B(u_0, 4\delta)} \Rightarrow \|\varphi'(u)\|_{E'} \geq r \geq 8\epsilon/\delta,$$

logo existe um homeomorfismo $\eta \in C(E, E)$ tal que

- (a) $\eta(u) = u$ sempre que $u \notin \varphi^{-1}([\lambda - 2\epsilon, \lambda + 2\epsilon]) \cap \overline{B(u_0, 4\delta)}$.
- (b) $\eta(\varphi^{\lambda+\epsilon} \cap B(u_0, 2\delta)) \subseteq \varphi^{\lambda-\epsilon}$,
- (c) $\varphi(\eta(u)) \leq \varphi(u)$ para todo $u \in E$.

Pelo Lema 2.3, $\varphi(tu_0) \leq \lambda$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(tu_0) = \lambda$ se, e somente se $t = 1$. Assim, sendo $\theta \in (0, 1)$ tal que $tu_0 \in B(u_0, 2\delta)$ sempre que $t \in (1 - \theta, 1 + \theta)$, temos que

$$\varphi(tu_0) < \lambda, \quad t \in [0, 1 - \theta] \cup [1 + \theta, \infty).$$

Mas o item (c) do Lema 2.1 garante que existe $t_0 > 0$ tal que $\varphi(tu_0) < 0$ para todo $t \geq t_0$. Aumentando $t_0 > 0$, se necessário, podemos supor que $\|t_0 u_0\| \geq r_0$, onde r_0 é dado pelo mesmo lema. Consequentemente

$$\max_{|t-1| \geq \theta} \varphi(tu_0) = \max \left\{ \max_{t \in [0, 1-\theta]} \varphi(tu_0), \max_{t \in [1+\theta, t_0]} \varphi(tu_0) \right\} < \lambda. \quad (2.11)$$

2.1.3 Existência de uma solução positiva

Além disso, $\varphi(\eta(tu_0)) \leq \lambda - \epsilon$ sempre que $tu_0 \in B(u_0, 2\delta)$ em virtude de (b). Combinando este fato com (2.11) e (e) concluímos que

$$\max_{t \geq 0} \varphi(\eta(tu_0)) < \lambda = c. \quad (2.12)$$

Agora consideremos a curva (contínua) $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ definida por $\gamma(s) = \eta(st_0u_0)$, $s \in [0, 1]$. Por (a), $\gamma \in \Gamma$. Com efeito, $\gamma(0) = \eta(0) = 0$, $\gamma(1) = \eta(t_0u_0) = t_0u_0 \notin \overline{B(0, r_0)}$ e $\varphi(\gamma(1)) = \varphi(t_0u_0) < 0$. Segue da definição de c e de $\varphi(\eta(tu_0)) = \varphi(tu_0) < 0$ para todo $t \geq t_0$ que

$$\max_{t \geq 0} \varphi(\eta(tu_0)) = \max_{s \in [0, 1]} \varphi(\gamma(s)) \geq c,$$

uma contradição com (2.12). Portanto devemos ter $\varphi'(u_0) = 0$. ■

Seja $v \in \mathcal{N}$ um ponto crítico qualquer de φ com valor crítico λ . Seja $u = |v|$. Sabemos que $u \in H_0^1(\Omega)$, com suas derivadas fracas sendo dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x), & \text{se } v(x) > 0 \\ 0, & \text{se } v(x) = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x_j}(x), & \text{se } v(x) < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

para quase todo $x \in \Omega$, $j = 1, \dots, N$ (conferir [12, Lemma 7.6, pág. 152]). É imediato da definição que u é radial e temos

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2) dx = \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + b(|x|)v^2) dx < \infty$$

em virtude de (2.13). Portanto $u \in E$. Como $g(r, \xi)$ é ímpar e $G(r, \xi)$ é par em $\xi \in \mathbb{R}$ para cada $r \geq 0$, segue que

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + b(|x|)v^2 - 2G(|x|, v)) dx = \varphi(v) = \lambda.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(u), u \rangle &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} |v| g(|x|, |v|) dx \\ &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} v g(|x|, v) dx \\ &= \langle \varphi'(v), v \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $u \in \mathcal{N}$. Segue pelo Lema 2.6 que u é uma solução fraca radial e não-negativa de (2.3) e, portanto, de (2.2).

2.1.4 Sumário de resultados

Na verdade, u é uma solução clássica (de classe C^2) radial do problema (2.2) pela Teoria de Regularidade na Subseção 2.5.2. Notemos ainda que

$$-\Delta u(x) + b(|x|)u(x) = f(|x|, u(x)) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Assim, quaisquer que sejam ρ', σ' com $\rho < \rho' < \sigma' < \sigma$ temos que $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega(\rho', \sigma')$ pelo Princípio do Máximo (conferir [8, Theorem 4, § 6.4, pág. 333]). Concluimos que u é uma solução clássica positiva do problema (2.2).

2.1.4 Sumário de resultados

Uma solução negativa (clássica e radial) para o problema (2.2) pode ser obtida de modo inteiramente análogo usando-se a função

$$g^- : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, u) \longmapsto \begin{cases} -f(r, -u), & \text{se } u \geq 0 \\ f(r, u), & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$$

e estudando-se o problema correspondente

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = g^- (|x|, u) \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.14)$$

Obtemos um funcional $\varphi^-(\rho, \sigma) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e cujos pontos críticos são soluções fracas do problema (2.14). Em seguida, definimos a variedade de Nehari $\mathcal{N}^-(\rho, \sigma)$ da mesma maneira e mostramos que

$$\lambda^-(\rho, \sigma) := \inf_{u \in \mathcal{N}^-(\rho, \sigma)} (\varphi^-(\rho, \sigma))(u) > 0$$

está bem definido e é um valor crítico não-trivial de $\varphi^-(\rho, \sigma)$ ao qual está associada uma solução clássica negativa de (2.14). Esta é, de fato, uma solução clássica radial e negativa do problema (2.2).

Resumimos na proposição a seguir o que foi provado nesta seção.

Proposição 2.1. *Se valem (b_0) e (f_1) – (f_5) , então, para cada ρ, σ , $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$, existem uma solução (clássica) radial e positiva $u^+ = u^+(\rho, \sigma)$ do problema (2.2) tal que $\varphi^+(u^+) = \lambda^+(\rho, \sigma)$ e uma solução (clássica) radial e negativa $u^- = u^-(\rho, \sigma)$ do mesmo problema tal que $\varphi(u^-) = \lambda^-(\rho, \sigma)$.*

Se $\rho = 0$ e $\sigma = \infty$, então as soluções (clássicas) radiais e que não trocam de sinal u_0^\pm do Teorema 2.1 são dadas diretamente pela Proposição 2.1. Para construir as soluções com um ou mais nós, precisamos primeiro estabelecer algumas propriedades das energias $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$.

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

Agora estudamos a dependência dos valores críticos $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$ com respeito a (ρ, σ) . As Proposições 2.2 e 2.3 serão essenciais para provarmos que o candidato a solução de (2.1) com o qual trabalhamos na próxima seção está bem definido.

O argumento desenvolvido seria, em essência, o mesmo para λ^+ ou λ^- . Sendo assim, escrevemos apenas λ , assim como g para g^+ ou g^- , φ para φ^+ ou φ^- , e assim por diante.

Proposição 2.2. *Se estão satisfeitos (b_0) e (f_1) – (f_5) , então os valores críticos $\lambda(\rho, \sigma)$, $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$, de φ satisfazem*

- (a) *Se $0 \leq \rho \leq \rho' < \sigma' \leq \sigma \leq \infty$, então $\lambda(\rho, \sigma) \leq \lambda(\rho', \sigma')$;*
- (b) *$\lambda(\rho, \sigma) \rightarrow \infty$ quando $(\sigma - \rho) \rightarrow 0$;*
- (c) *$\lambda(\rho, \infty) \rightarrow \infty$ quando $\rho \rightarrow \infty$.*

Demonstração. (a) Observe que, neste caso, $H_0^1(\Omega(\rho', \sigma')) \subseteq H_0^1(\Omega(\rho, \sigma))$, de modo que $\mathcal{N}(\rho', \sigma')$ pode ser visto como um subconjunto de $\mathcal{N}(\rho, \sigma)$. Sendo assim,

$$\lambda(\rho, \sigma) = \inf_{u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)} \varphi(u) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}(\rho', \sigma')} \varphi(u) = \lambda(\rho', \sigma'),$$

provando a afirmação no item (a).

(b) Para cada $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$, temos

$$\langle \varphi'(u), u \rangle = \|u\|^2 - \int_{\Omega(\rho, \sigma)} g(|x|, u)u \, dx = 0$$

pela definição de variedade de Nehari. Segue por (f_2) que

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega(\rho, \sigma)} g(|x|, u)u \, dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u\|^2 \quad (2.15)$$

para cada $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$.

Por outro lado, pelo Lema B.2, pela desigualdade de Hölder e por (2.4),

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

para cada $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left| \int_{\Omega(\rho, \sigma)} g(|x|, u) u \, dx \right| \\
&\leq \frac{a_0}{2} \int_{\Omega(\rho, \sigma)} |u|^2 \, dx + a_2 \int_{\Omega(\rho, \sigma)} |u|^{s+1} \, dx \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + a_2 \left(\int_{\Omega(\rho, \sigma)} |u|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{s+1}{2^*}} \cdot \left(\int_{\Omega(\rho, \sigma)} 1 \, dx \right)^{1 - \frac{s+1}{2^*}} \\
&= \frac{1}{2} \|u\|^2 + a_3 \|u\|_{L^{2^*}(\Omega(\rho, \sigma))}^{s+1} (\sigma^N - \rho^N)^{1 - \frac{s+1}{2^*}} \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + a_4 \|u\|^{s+1} (\sigma^N - \rho^N)^{1 - \frac{s+1}{2^*}},
\end{aligned}$$

onde a_2, a_3, a_4 são constantes positivas apropriadas.¹ Portanto

$$\|u\|^{s-1} \geq (\sigma^N - \rho^N)^{-1 + \frac{s+1}{2^*}} / (2a_4), \quad u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma). \quad (2.16)$$

Como $s > 1$ e $s + 1 < 2^*$, segue por (2.16) que $\|u\| \rightarrow \infty$ quando $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$ e $(\sigma - \rho) \rightarrow 0$. E como $\mu > 2$, segue, então, por (2.15) que $\varphi(u) \rightarrow \infty$ quando $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$ e $(\sigma - \rho) \rightarrow 0$. Em particular,

$$\lambda(\rho, \sigma) = \inf_{u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)} \varphi(u) \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad (\sigma - \rho) \rightarrow 0.$$

(c) Pelo item (a) da Proposição 1.3, temos que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega(\rho, \infty))} \leq c(N) a_0^{-1/4} \rho^{(1-N)/2} \|u\|, \quad u \in \mathcal{N}(\rho, \infty).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &\leq \frac{a_0}{2} \int_{\Omega(\rho, \infty)} |u|^2 \, dx + a_2 \int_{\Omega(\rho, \infty)} |u|^{s+1} \, dx \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + a_2 \|u\|_{L^2(\Omega(\rho, \infty))}^2 (c(N) \rho^{(1-N)/2} \|u\|)^{s-1} \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + a_5 \|u\|^2 \rho^{(1-N)(s-1)/2} \|u\|^{s-1}
\end{aligned}$$

para cada $u \in \mathcal{N}(\rho, \infty)$, onde podemos tomar $a_5 = a_2 C(2) (c(N))^{s-1}$. Concluimos que

$$\|u\| \geq (1/(2a_5)) \rho^{(N-1)/2}, \quad u \in \mathcal{N}(\rho, \infty),$$

de modo que $\|u\| \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \infty$. O item (c) segue da combinação deste fato com (2.15), o que completa a demonstração da Proposição 2.2. \blacksquare

¹Escolhas naturais são dadas pelos cálculos acima por $a_2 = (s+1)A(a_0/4)$, com $A(a_0/4) > 0$ dada pelo Lema B.2, $a_3 = a_2(\omega_N/N)^{1-(s+1)/2^*}$, onde $\omega_N > 0$ é a área da esfera unitária de \mathbb{R}^N , e $a_4 = a_3(C(2^*))^{s+1}$, onde $C(2^*) > 0$ é dada por (2.4).

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

Os dois lemas a seguir contêm os detalhes técnicos da demonstração da Proposição 2.3.

Lema 2.7. *Sejam $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ números reais. Então*

$$\alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$$

se, e somente se, toda subsequência $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(\alpha_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\alpha \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \alpha_{n_{k_l}}.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Para toda subsequência $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ temos

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \alpha_{n_l} \geq \liminf_{l \rightarrow \infty} \alpha_l \geq \alpha.$$

(\Leftarrow) Suponhamos, ao contrário, que seja

$$\alpha > \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Então existem um $\epsilon_0 > 0$ e uma subsequência $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\alpha_{n_k} \leq \alpha - \epsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \alpha_{n_{k_l}} \leq \alpha - \epsilon_0 < \alpha,$$

qualquer que seja a subsequência $(\alpha_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ de $(\alpha_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, o que é uma contradição. ■

Em virtude disso, quando formos demonstrar a desigualdade (2.18), poderemos passar a subsequências sempre que for conveniente e sem perda de generalidade.

Lema 2.8. *Sejam $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de soluções fracas de (2.2) em $E(\rho, \sigma)$. Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para $u \in E(\rho, \sigma)$, então u é uma solução fraca de (2.2).*

Como ρ e σ estarão fixos por toda a demonstração, iremos escrever apenas E, Ω , etc ao invés de $E(\rho, \sigma), \Omega(\rho, \sigma)$, etc, como temos feito sempre que não há perigo de confusão.

Demonstração. Pela definição de solução fraca, temos que

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u_n + b(|x|)vu_n - vg(|x|, u_n)) dx = 0, \quad v \in C_c^\infty(\Omega), \quad n \in \mathbb{N},$$

e precisamos mostrar que

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + b(|x|)vu - vg(|x|, u)) dx = 0, \quad v \in C_c^\infty(\Omega).$$

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

Pela convergência fraca na hipótese, obtemos, imediatamente,

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u_n + b(|x|)vu_n) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + b(|x|)vu) dx$$

para cada $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Nos resta, portanto, provar que

$$\int_{\Omega} vg(|x|, u_n) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} vg(|x|, u) dx, \quad v \in C_c^\infty(\Omega), \quad (2.17)$$

o que fazemos usando o Teorema da Convergência Dominada.

Fixemos arbitrariamente $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Então existem ρ', σ' com $\rho \leq \rho' < \sigma' \leq \sigma$ e $\sigma' < \infty$ tais que $v(x) = 0$ para cada $x \notin \Omega(\rho', \sigma') =: \Omega'$. Devido à imersão compacta de E em $L^{s+1}(\Omega')$ (Teorema A.3), passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ para quase todo $x \in \Omega'$ e que existe uma $h \in L^{s+1}(\Omega')$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ para quase todo $x \in \Omega'$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $g(|x|, u_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(|x|, u(x))$ para quase todo $x \in \Omega'$, pois g é contínua. Por outro lado, sendo $K_v > 0$ uma cota superior para v e $A = (s+1)A(1/2)$ dada pelo Lema B.2, temos que

$$|v(x)g(|x|, u_n(x))| \leq K_v[|u_n(x)| + A|u_n(x)|^s] \leq K_v[h(x) + A(h(x))^s],$$

para quase todo $x \in \Omega'$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $h \in L^p(\Omega')$, $1 \leq p \leq s+1$, pois Ω' é limitado, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} vg(|x|, u_n) dx &= \int_{\Omega'} vg(|x|, u_n) dx \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} vg(|x|, u) dx = \int_{\Omega} vg(|x|, u) dx, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do lema. ■

Proposição 2.3. *Sob as mesmas hipóteses da Proposição 2.2, temos que*

- (a) $(\rho, \sigma) \mapsto \lambda(\rho, \sigma)$ é semicontínua inferiormente com respeito a (ρ, σ) em $0 < \rho < \sigma < \infty$ e
- (b) $\rho \mapsto \lambda(\rho, \infty)$ é semicontínua inferiormente com respeito a ρ em $0 < \rho < \infty$.

Demonstração. (a) Precisamos mostrar que, dados (ρ, σ) e $((\rho_n, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em $\{(\rho', \sigma') \in \mathbb{R}^2; 0 < \rho' < \sigma'\}$ com $(\rho_n, \sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\rho, \sigma)$, temos que

$$\lambda(\rho, \sigma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(\rho_n, \sigma_n). \quad (2.18)$$

Recordemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma solução fraca $u_n \in \mathcal{N}(\rho_n, \sigma_n)$ de (2.2) em $\Omega(\rho_n, \sigma_n)$ tal que $\varphi(u_n) = \lambda(\rho_n, \sigma_n)$ pela Proposição 2.1.

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

1. Temos que $u_n \in E(\rho_n, \sigma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e a natureza arbitrária de $((\rho_n, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não nos dá nenhuma relação imediata entre estes espaços. Nosso primeiro objetivo deve ser, portanto, encontrar um espaço adequado para trabalharmos com essas funções. Sejam

$$\rho_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_n \quad \text{e} \quad \sigma_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n.$$

Temos que $\rho_0 \leq \rho_n < \sigma_n \leq \sigma_0$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, como foi feito na demonstração do item (a) da Proposição 2.2, podemos considerar que $E(\rho, \sigma) \subseteq E(\rho_0, \sigma_0)$ e $\mathcal{N}(\rho, \sigma) \subseteq \mathcal{N}(\rho_0, \sigma_0)$.

2. Em virtude de (2.15), temos que $\varphi|_{\mathcal{N}}$ é coercivo. Além disso, a sequência $(\varphi(u_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda(\rho_n, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada devido ao item (a) da Proposição 2.2. Com efeito, se $0 < \epsilon < (\sigma - \rho)/2$ e $n \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, então $\rho_n < \rho + \epsilon < \sigma - \epsilon < \sigma_n$ e, conseqüentemente, $\varphi(u_n) = \lambda(\rho_n, \sigma_n) \leq \lambda(\rho + \epsilon, \sigma - \epsilon)$. Concluimos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para alguma $u \in E(\rho_0, \sigma_0)$. Mostraremos que

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(\rho_n, \sigma_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$$

e, em seguida, que $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$. Assim, teremos

$$\lambda(\rho, \sigma) = \inf_{v \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)} \varphi(v) \leq \varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(\rho_n, \sigma_n),$$

o que completa a demonstração.

3. Por um lado,

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$$

devido à convergência fraca, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} (|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2) dx &= \frac{\|u\|^2}{2} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} (|\nabla u_n|^2 + b(|x|)u_n^2) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Por outro lado, a aplicação

$$v \longmapsto \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} G(|x|, v) dx, \quad v \in E(\rho_0, \sigma_0),$$

é fracamente contínua (veja Proposição B.3), logo

$$\int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} G(|x|, u_n) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} G(|x|, u) dx.$$

2.2 Propriedades qualitativas de $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$

5. Combinando o que foi obtido em 3. e 4., vem

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} G(|x|, u) \, dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|^2}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} G(|x|, u_n) \, dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|u_n\|^2}{2} - \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} G(|x|, u_n) \, dx \right) \\ &= \lambda(\rho_n, \sigma_n). \end{aligned}$$

6. Por 5. e pelo que foi observado em 2., está faltando apenas mostrarmos que $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$. Como $\rho > 0$, u, u_n , são contínuas pelo Teorema 1.3, $n \in \mathbb{N}$. Como $E(\rho_0, \sigma_0)$ está imerso compactamente em $L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))$, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ para quase todo $x \in \Omega(\rho_0, \sigma_0)$. Em particular, $u(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega(\rho_0, \sigma_0) \setminus \Omega(\rho, \sigma)$, de onde segue por continuidade que, de fato, $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega(\rho_0, \sigma_0) \setminus \Omega(\rho, \sigma)$. Em particular, $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega(\rho, \sigma)$. Como $u \in H^1(\Omega(\rho, \sigma))$ e $\partial\Omega(\rho, \sigma)$ é compacta e de classe C^1 , concluímos pelo Teorema do Traço [8, § 5.5, Theorem 2, pág. 259] que $u \in H_0^1(\Omega(\rho, \sigma))$.

Agora, dado $\epsilon > 0$ qualquer, se $n \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, temos $\rho_n < \rho + \epsilon$ e $\sigma - \epsilon < \sigma_n$. Quando $\epsilon < (\sigma - \rho)/2$, isto quer dizer que u_n é solução fraca de

$$-\Delta u + b(|x|)u^2 = g(|x|, u) \quad (2.19)$$

em $\Omega(\rho + \epsilon, \sigma - \epsilon)$. Segue pelo Lema 2.8 que u é solução fraca e, portanto, clássica da equação acima em $\Omega(\rho + \epsilon, \sigma - \epsilon)$, $0 < \epsilon < (\sigma - \rho)/2$. Mas então u é solução clássica da equação acima em $\Omega(\rho, \sigma)$, logo é solução fraca.

Para termos $u \in \mathcal{N}(\rho, \sigma)$ basta, agora, que tenhamos $u \neq 0$, o que completa a prova do item (a) da Proposição 2.3. Ora, como $u_n \in \mathcal{N}(\rho_0, \sigma_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{C}_1 \|u_n\|_{L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))}^2 &\leq \|u_n\|^2 \\ &= \left| \int_{\Omega(\rho_0, \sigma_0)} u_n g(|x|, u_n) \, dx \right| \\ &\leq \overline{C}_2 \|u\|_{L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))}^{s+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

para certas constantes $\overline{C}_1, \overline{C}_2 > 0$ obtidas via Lema B.2, desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev (veja cálculos na prova do item (b) da Proposição 2.2). Consequentemente,

$$\|u_n\|_{L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))} \geq \left(\frac{\overline{C}_1}{\overline{C}_2} \right)^{1/(s-1)} > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

Por outro lado, passando-se novamente a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))$ por meio da convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ e da imersão compacta $E(\rho_0, \sigma_0) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))$. Substituindo em (2.20), obtemos

$$\|u\|_{L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^{s+1}(\Omega(\rho_0, \sigma_0))} > 0,$$

de onde concluímos que $u \neq 0$.

(b) A demonstração do item (b) é análoga à do item (a). 1. Definimos

$$\rho_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_n$$

como antes e consideramos a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço $E(\rho_0, \infty)$. 2. Passando-se a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u$ para alguma $u \in E(\rho_0, \infty)$ e basta mostrarmos que

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n) \tag{2.21}$$

e $u \in \mathcal{N}(\rho_0, \infty)$. 3.-5. Pela convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ e pela Proposição B.3, obtemos (2.21).

6. Como $u \in H^1(\Omega(\rho, \infty))$ e $\partial\Omega(\rho, \infty)$ é compacta e de classe C^1 , segue exatamente como no primeiro parágrafo de 6. do item (a) desta demonstração que $u \in H_0^1(\rho, \infty)$.

Adaptando o argumento no segundo parágrafo de 6. do item (a), concluímos que u é solução fraca e, portanto, clássica de (2.19) em $\Omega(\rho + \epsilon, M)$ sempre que $0 < \epsilon < M$. Concluímos que u é solução clássica e, portanto, fraca de (2.19) em $\Omega(\rho, \infty)$. Mostramos analogamente que $u \neq 0$. Em particular, $u \in \mathcal{N}(\rho, \infty)$. ■

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

Nesta seção, provamos o Teorema 2.1, objetivo central do capítulo. Recordemos que não precisamos mais nos preocupar com as soluções com zero nós—soluções estritamente positivas ou estritamente negativas—em virtude da Proposição 2.1. Fixado arbitrariamente $k \in \mathbb{N}$, iremos construir uma solução u_k^+ de (2.1) tendo exatamente k nós e com $u_k^+(0) > 0$. Uma solução u_k^- com exatamente k nós e com $u_k^-(0) < 0$ pode ser construída de maneira análoga.

Para cada $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotamos

$$\epsilon_j = \begin{cases} +, & \text{se } j \text{ é par} \\ -, & \text{se } j \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

colocamos $\rho_0 = \bar{\rho}_0 = 0$, $\rho_{k+1} = \bar{\rho}_{k+1} = \infty$ e definimos

$$\Lambda^+(\rho_1, \dots, \rho_k) := \sum_{j=0}^k \lambda^{\epsilon_j}(\rho_j, \rho_{j+1}), \quad (\rho_1, \dots, \rho_k) \in N_k,$$

onde $N_k = \{(\rho_1, \dots, \rho_k) \in \mathbb{R}^k; 0 < \rho_1 < \dots < \rho_k < \infty\}$. Por simplicidade de notação, escrevemos $(\rho_1, \dots, \rho_k) = \rho$ até o final da demonstração do Lema 2.9.

Lema 2.9. *Existe $(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k) \in N_k$ tal que*

$$\Lambda^+(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k) = \inf_{\rho \in N_k} \Lambda^+(\rho_1, \dots, \rho_k).$$

Demonstração. A idéia é aplicar a Proposição A.2. Pelas Proposições 2.3 e A.1, já sabemos que $\rho \mapsto \Lambda^+(\rho)$, $\rho \in N_k$, define uma função semicontínua inferiormente e nos resta, portanto, encontrar um compacto no qual procurar o mínimo de Λ^+ .

Seja $M > 0$ um valor qualquer atingido por Λ^+ . Pela Proposição 2.2, existem $K, \epsilon > 0$ tais que se $\rho_k > K$ ou $(\rho_{j+1} - \rho_j) < \epsilon$ para algum $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, então $\Lambda^+(\rho) \geq 2M$. Diminuindo $\epsilon > 0$, se necessário, podemos supor que $k\epsilon < K$. Logo o mínimo de Λ^+ , caso exista, está no conjunto não-vazio, fechado e limitado (compacto)

$$\widehat{N}_k = \{\rho \in N_k; \rho_k \leq K \text{ e } (\rho_{j+1} - \rho_j) \geq \epsilon, j = 0, 1, \dots, k-1\}.$$

A Proposição A.2 garante agora que existe $(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k) \in \widehat{N}_k$ tal que

$$\Lambda^+(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k) = \inf_{\rho \in \widehat{N}_k} \Lambda^+(\rho) \leq M.$$

Como $\Lambda^+(\rho) > 0$ para todo $\rho \in N_k$, o ínfimo acima está bem definido como um número real. E como $\Lambda^+(\rho) \geq 2M$ sempre que $\rho \notin \widehat{N}_k$, na verdade $(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k)$ é um mínimo absoluto de Λ^+ em N_k . ■

Agora sejam $u_j \in H_0^1(\Omega(\bar{\rho}_j, \bar{\rho}_{j+1}))$ uma solução radial de (2.1) tal que $\varphi^{\epsilon_j}(u_j) = \lambda^{\epsilon_j}(\bar{\rho}_j, \bar{\rho}_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, k$ (veja Proposição 2.1). Definamos $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ por

$$u(x) = u_j(x), \quad \bar{\rho}_j \leq |x| < \bar{\rho}_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad (2.22)$$

(veja o Teorema A.4). Por construção, u é radial, $u(0) > 0$ e u tem precisamente k nós. O restante da seção é dedicado à prova de que u também é uma solução clássica em \mathbb{R}^N de

$$-\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u), \quad (2.23)$$

o que prova o Teorema 2.1.

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

Como $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, u é contínua e existe $\tilde{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (contínua) tal que $u(x) = \tilde{u}(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Pela teoria de regularidade da Subseção 2.5.2, u é de classe C^2 em $\Omega(\rho_j, \rho_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, k$, logo \tilde{u} é de classe C^2 em

$$U := \{r > 0; r \neq \rho_j, j = 1, \dots, k\}.$$

Além disso, \tilde{u} satisfaz a forma polar

$$-(r^{N-1}\tilde{u}')' = r^{N-1}(f(r, \tilde{u}) - b(r)\tilde{u}) \quad (2.24)$$

da equação (2.23) em U , onde $'$ denota a diferenciação com respeito a r . Para provarmos que u é solução radial clássica de (2.23) basta, portanto, provarmos que \tilde{u} é solução de classe C^2 de (2.24) em $(0, \infty)$.

Fixemos arbitrariamente $j \in \{1, \dots, k\}$. Mostramos nos próximos dois lemas que as derivadas laterais de u em ρ_j existem. Para simplificar a notação, iremos escrever $\rho = \rho_{j-1}$, $\sigma = \rho_j$ e $\tau = \rho_{j+1}$. Também usaremos u para denotar \tilde{u} , a menos que haja possibilidade de confusão com a função definida em \mathbb{R}^N logo acima.

Lema 2.10. *Se $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , e o limite*

$$\psi'_+ := \lim_{r \rightarrow a^+} \psi'(r)$$

existe, então ψ é derivável à direita em a e

$$\psi'_+(a) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} = \psi'_+.$$

Analogamente, se o limite

$$\psi'_- := \lim_{r \rightarrow b^-} \psi'(r)$$

existe, então ψ é derivável à esquerda em b e

$$\psi'_-(b) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\psi(b) - \psi(b-h)}{h} = \psi'_-.$$

Demonstração. Para cada $h \in (0, b-a)$, existe $\xi_h \in (a, a+h)$ tal que

$$\left| \frac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h} - \psi'_+ \right| = |\psi'(\xi_h) - \psi'_+| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$$

pelo Teorema do Valor Médio. A segunda conclusão do lema é provada de modo análogo. ■

Lema 2.11. *Existem os limites e valem as igualdades*

$$u'_- := \lim_{r \rightarrow \sigma^-} u'(r) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(\sigma) - u(\sigma-h)}{h}.$$

e

$$u'_+ := \lim_{r \rightarrow \sigma^+} u'(r) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(\sigma+h) - u(\sigma)}{h}$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

Demonstração. Como u é contínua em $[\rho, \tau]$, se os limites existem, então as igualdades são válidas pelo Lema 2.10. Portanto basta mostrarmos que os limites existem.

Fixando arbitrariamente $r_- \in (\rho, \sigma)$, integrando ambos membros de (2.24) de r_- a $r \in (\rho, \sigma)$ e isolando $u'(r)$ obtemos

$$u'(r) = \frac{r_-^{N-1} u'(r_-)}{r^{N-1}} - \frac{1}{r^{N-1}} \int_{r_-}^r (f(s, u(s)) - b(s)u(s)) s^{N-1} ds.$$

Mas f, b, u são contínuas em seus domínios por $(b_0), (f_1)$ e pela construção de u , logo a integral no membro direito da igualdade acima define uma função contínua de r em uma vizinhança de σ , por exemplo, em $[r_-, \tau]$. Portanto existe o limite

$$\lim_{r \rightarrow \sigma^-} u'(r) = \frac{r_-^{N-1} u'(r_-)}{\sigma^{N-1}} - \frac{1}{\sigma^{N-1}} \int_{r_-}^{\sigma} (f(s, u(s)) - b(s)u(s)) s^{N-1} ds.$$

A existência do outro limite é provada analogamente. ■

Afirmamos que, se $u'_- = u'_+$, então u é uma solução de classe C^2 de (2.24) em uma vizinhança de σ . Com efeito, suponhamos que $u'_- = u'_+ = u'(\sigma)$ e seja $r_+ \in (\sigma, \tau)$ qualquer. Igualando as expressões obtidas para u'_- e u'_+ na demonstração do Lema 2.11 e multiplicando ambos membros da equação obtida por σ^{N-1} , obtemos

$$r_+^{N-1} u'(r_+) = r_-^{N-1} u'(r_-) - \int_{r_-}^{r_+} (f(s, u(s)) - b(s)u(s)) s^{N-1} ds. \quad (2.25)$$

Assim,

$$u'(r) = \frac{r_-^{N-1} u'(r_-)}{r^{N-1}} - \frac{1}{r^{N-1}} \int_{r_-}^r (f(s, u(s)) - b(s)u(s)) s^{N-1} ds, \quad r \in (\rho, \tau).$$

De fato, se $r \in (\rho, \sigma]$, então a igualdade acima é válida pelo argumento na demonstração do Lema 2.11 e, se $r \in (\sigma, \tau)$, então a igualdade é válida pela substituição de (2.25) em

$$u'(r) = \frac{r_+^{N-1} u'(r_+)}{r^{N-1}} - \frac{1}{r^{N-1}} \int_{r_+}^r (f(s, u(s)) - b(s)u(s)) s^{N-1} ds.$$

Concluimos que u' é de classe C^1 e u satisfaz (2.24) em (ρ, σ) .

O restante da seção é dedicado à prova da

Afirmação. $u'_- = u'_+$.

Conforme o argumento acima, a verificação desta afirmação completa a demonstração do Teorema 2.1. A isso nos aplicamos.

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

Verificação da Afirmação

Suponhamos, ao contrário, que $u'_- \neq u'_+$. Para fixar idéias, suponhamos também que $u(r) \geq 0$ em $[\rho, \sigma]$ e $u(r) \leq 0$ em $[\sigma, \tau]$. O caso em que $u(r) \leq 0$ em $[\rho, \sigma]$ e $u(r) \geq 0$ em $[\sigma, \tau]$ pode ser tratado de maneira análoga. Fixemos arbitrariamente $\delta > 0$ tal que $\delta < \max\{\sigma - \rho, \tau - \sigma\}$ e definamos $v : [\rho, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(r) = \begin{cases} u(r), & \text{se } |r - \sigma| \geq \delta \\ u(\sigma - \delta) + \frac{r - \sigma + \delta}{2\delta}(u(\sigma + \delta) - u(\sigma - \delta)), & \text{se } |r - \sigma| \leq \delta \end{cases}.$$

Temos que v é contínua em $[\rho, \tau]$, $v(\sigma - \delta) = u(\sigma - \delta) > 0$, $v(\sigma + \delta) < 0$ e que existe um único $\sigma_0 = \sigma_0(\delta) \in (\sigma - \delta, \sigma + \delta)$ tal que $v(\sigma_0) = 0$. Uma aplicação do Teorema do Traço [8, § 5.5, Theorem 2, pág. 259] como na prova da Proposição 2.3 prova que $v \in E(\rho, \sigma_0), E(\sigma_0, \tau)$. Pelo Lema 2.3, existem $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ e $\beta = \beta(\delta) > 0$ tais que $\alpha v \in \mathcal{N}^+(\rho, \sigma_0)$ e $\beta v \in \mathcal{N}^-(\sigma_0, \tau)$.

O próximo lema é um resultado técnico que será usado posteriormente para estimar uma das integrais em (2.28).

Lema 2.12. *Se α, β são definidos como acima, então*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \alpha(\delta) = 1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \beta(\delta).$$

Demonstração. Provamos que $\alpha(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$. O outro limite é verificado analogamente.

(I) De modo parecido com o que aconteceu na Proposição 2.3, como $\alpha(\delta)$ é definido pensando-se em v_δ como um elemento de $E(\rho, \sigma_0(\delta))$ e os $\sigma_0(\delta)$ podem não ser todos iguais, a primeira coisa de que precisamos é um espaço adequado para trabalhar. Sejam $\hat{u}, \hat{v}_\delta : \Omega(\rho, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \Omega(\rho, \sigma) \\ 0, & \text{se } x \in \Omega(\rho, \tau) \setminus \Omega(\rho, \sigma) \end{cases},$$

e

$$\hat{v}_\delta(x) = \begin{cases} v(x), & \text{se } x \in \Omega(\rho, \sigma_0(\delta)) \\ 0, & \text{se } x \in \Omega(\rho, \tau) \setminus \Omega(\rho, \sigma_0(\delta)) \end{cases},$$

$0 < \delta < \min\{\tau - \sigma, \sigma - \rho\} =: \delta_0$. Pela Teorema A.4, temos que $\hat{u}, \hat{v}_\delta \in H_0^1(\Omega(\rho, \tau))$, portanto $\hat{u}, \hat{v}_\delta \in E(\rho, \tau)$, $0 < \delta < \delta_0$. Na verdade temos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(\hat{u}), \hat{u} \rangle &= \int_{\Omega(\rho, \tau)} \left(|\nabla \hat{u}|^2 + b(|x|) |\hat{u}|^2 - \hat{u}g(|x|, \hat{u}) \right) dx \\ &= \int_{\Omega(\rho, \sigma)} \left(|\nabla u|^2 + b(|x|) |u|^2 - ug(|x|, u) \right) dx \\ &= \langle \varphi'(u), u \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

e, analogamente, $\langle \varphi'(\alpha(\delta)\widehat{v}), \alpha(\delta)\widehat{v} \rangle = 0$, ou seja,

$$\widehat{u}, \alpha(\delta)\widehat{v}_\delta \in \mathcal{N}(\rho, \tau), \quad 0 < \delta < \delta_0. \quad (2.26)$$

(II) Para cada $\delta \in (0, \delta_0)$, temos pela Desigualdade Triangular que

$$\begin{aligned} \|\widehat{u} - \widehat{v}_\delta\| &= \left(\int_{\Omega(\sigma-\delta, \sigma+\delta)} \left(|\nabla \widehat{u} - \nabla \widehat{v}_\delta|^2 + b(|x|) |\widehat{u} - \widehat{v}_\delta|^2 \right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega(\sigma-\delta, \sigma)} \left(|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2 \right) dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega(\sigma-\delta, \sigma_0(\delta))} \left(|\nabla v_\delta|^2 + b(|x|)v_\delta^2 \right) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $x \mapsto |\nabla u(x)|^2 + b(|x|)[u(x)]^2$ é integrável em $\Omega(\rho, \sigma)$ e $|\Omega(\sigma - \delta, \sigma)|$ tende a zero quando $\delta \rightarrow 0^+$, segue que

$$\left(\int_{\Omega(\sigma-\delta, \sigma)} \left(|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2 \right) dx \right)^{1/2} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(\sigma-\delta, \sigma_0(\delta))} \left(|\nabla v_\delta|^2 + b(|x|)v_\delta^2 \right) dx \\ &= \int_{\sigma-\delta}^{\sigma_0(\delta)} \left(\left| \frac{u(\sigma+\delta) - u(\sigma-\delta)}{2\delta} \right|^2 + b(r)[v_\delta(r)]^2 \right) r^{N-1} dr \end{aligned}$$

para cada $\delta \in (0, \delta_0)$. Como $\sigma_0(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \sigma$, b é contínua por (b_0) ,

$$\frac{u(\sigma+\delta) - u(\sigma-\delta)}{2\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \frac{u'_- + u'_+}{2} < \infty$$

pelo Lema 2.11, e $v_\delta(r) < M$ para cada $\delta \in (0, \delta_0)$, para cada $r \in (\sigma - \delta, \sigma_0(\delta))$, onde $M > 0$ é qualquer cota superior para u em (ρ, σ) , o integrando acima é limitado independentemente de $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Portanto a integral correspondente tende a 0 quando δ tende a 0, o que termina de mostrar que $\|\widehat{u} - \widehat{v}_\delta\| \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0^+$.

(III) Agora basta usarmos a continuidade da aplicação t do Lema 2.4. Com efeito, temos por (2.26) que $\alpha(\delta) = t(\widehat{v}(\delta)) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1 = t(\widehat{u})$. \blacksquare

Sejam $w : [\rho, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$w(r) = \begin{cases} \alpha v(r), & \text{se } \rho \leq \sigma_0 \\ \beta v(r), & \text{se } \sigma_0 \leq \rho \end{cases}$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

e

$$\psi(h) := \int_{\rho}^{\tau} \left(\frac{1}{2} |h'|^2 + \frac{b(r)}{2} h^2 - F(r, h) \right) r^{N-1}, \quad h \in E(\rho, \tau),$$

a representação polar de φ . Pela construção de u como sendo uma função que minimiza Λ^+ , devemos ter

$$\psi(u) \leq \psi(w). \quad (2.27)$$

Recordemos a condição de convexidade (f_5) . Temos que

$$\frac{\partial}{\partial h} (F(r, \sqrt{h})) = \frac{1}{2} \frac{f(r, \sqrt{h})}{\sqrt{h}}$$

crece com $h > 0$. Da mesma forma,

$$\frac{\partial}{\partial h} (F(r, -\sqrt{h})) = \frac{-1}{2} \frac{f(r, -\sqrt{h})}{\sqrt{h}}$$

também cresce com $h > 0$. Portanto $h \mapsto F(r, \sqrt{h})$ e $h \mapsto F(r, -\sqrt{h})$ são convexas em $h > 0$, ou seja, o gráfico de cada uma dessas funções está sempre acima de qualquer de suas tangentes. Daí, se $u(r)w(r) > 0$, isto é, se $u(r)$ e $w(r)$ têm o mesmo sinal, então

$$F(r, w(r)) \geq F(r, u(r)) + \frac{|w(r)|^2 - |u(r)|^2}{2} \frac{f(r, u(r))}{u(r)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\rho}^{\sigma-\delta} + \int_{\sigma+\delta}^{\tau} \right] \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 - F(r, w) \right) r^{N-1} dr \\ & \leq \left[\int_{\rho}^{\sigma-\delta} + \int_{\sigma+\delta}^{\tau} \right] \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 \right. \\ & \quad \left. - F(r, u) - \frac{w^2 - u^2}{2} \frac{f(r, u)}{u} \right) r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

Por outro lado, $uf(r, u) \geq 0$ por (f_4) – (f_5) , como foi mostrado no Lema B.1. Daí

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 - F(r, w) \right) r^{N-1} dr \\ & \leq \int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 \right. \\ & \quad \left. - F(r, u) + \frac{1}{2} uf(r, u) - F(r, w) + F(r, u) \right) r^{N-1} dr. \end{aligned}$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

Pela construção de u , temos que $u \in \mathcal{N}^+(\rho, \sigma)$ e $u \in \mathcal{N}^-(\sigma, \tau)$, logo

$$\int_{\rho}^{\sigma} (|u'|^2 + b(r)u^2)r^{N-1} dr = \int_{\rho}^{\sigma} uf(r, u)r^{N-1} dr.$$

Combinando esta igualdade com as duas desigualdades anteriores obtemos

$$\begin{aligned} \psi(w) \leq \psi(u) &+ \left[\int_{\rho}^{\sigma-\delta} + \int_{\sigma+\delta}^{\tau} \right] \left(\frac{1}{2}|w'|^2 + \frac{b(r)}{2}w^2 - \frac{w^2}{2u}f(r, u) \right) r^{N-1} dr \\ &+ \int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \left(\frac{1}{2}|w'|^2 + \frac{b(r)}{2}w^2 - F(r, w) + F(r, u) \right) r^{N-1} dr. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Agora estimamos essas integrais e extraímos da hipótese de que $u'_+ \neq u'_-$ uma contradição com (2.27).

Pelas definições de v e w e por (2.24), temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\rho}^{\sigma-\delta} \left(\frac{1}{2}|w'|^2 + \frac{b(r)}{2}w^2 - \frac{w^2}{2u}f(r, u) \right) r^{N-1} dr \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \int_{\rho}^{\rho-\delta} (|u'|^2 + b(r)u^2 - uf(r, u))r^{N-1} dr \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \int_{\rho}^{\rho-\delta} ((u')^2 r^{N-1} + u(r^{N-1}u'))' dr \\ &= \left(r^{N-1}uu' \right)_{r=\rho}^{\sigma-\delta}, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} &\int_{\rho}^{\sigma-\delta} \left(\frac{1}{2}|w'|^2 + \frac{b(r)}{2}w^2 - \frac{w^2}{2u}f(r, u) \right) r^{N-1} dr \\ &= \alpha^2(\sigma - \rho)^{N-1}u'(\sigma - \delta)u(\sigma - \delta)/2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Temos que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{u(\sigma - \delta) - u(\sigma)}{\delta} = -u'_-$$

e que $u(\sigma) = 0$, logo

$$u(\sigma - \delta) = -\delta u'_- + o(\delta). \quad (2.30)$$

Analogamente, por (2.24), temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \sigma^-} (r^{N-1}u'(r))' &= \lim_{r \rightarrow \sigma^-} r^{N-1}(f(r, u(r)) - b(r)u(r)) \\ &= \sigma^{N-1}(f(\sigma, u(\sigma)) - b(\sigma)u(\sigma)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

logo $r \mapsto r^{N-1}u'(r)$ é derivável à esquerda em $r = \sigma$ e sua derivada lateral à esquerda neste ponto é 0 pelo Lema 2.10. Ou seja,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{(\sigma - \delta)^{N-1}u'(\sigma - \delta) - \sigma^{N-1}u'_-}{\delta} = 0,$$

de onde concluímos que

$$(\sigma - \delta)^{N-1}u'(\sigma - \delta) = \sigma^{N-1}u'_- + o(\delta). \quad (2.31)$$

Finalmente, $\alpha(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$ como vimos no Lema 2.12. Combinando este fato com (2.29)–(2.31), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\rho}^{\sigma-\delta} \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 - \frac{w^2}{2u} f(r, u) \right) r^{N-1} dr \\ &= (1 + o(1))(-\delta u'_- + o(\delta))(\sigma^{N-1}u'_- + o(\delta))/2 \\ &= -\frac{\sigma^{N-1}}{2} (u'_-)^2 \delta + o(\delta). \end{aligned}$$

Mostramos de forma inteiramente análoga que

$$\int_{\sigma+\delta}^{\tau} \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 - \frac{w^2}{2u} f(r, u) \right) r^{N-1} dr = -\frac{\sigma^{N-1}}{2} (u'_+)^2 \delta + o(\delta).$$

Segue que

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\rho}^{\sigma-\delta} + \int_{\sigma+\delta}^{\tau} \right] \left(\frac{1}{2} |w'|^2 + \frac{b(r)}{2} w^2 - \frac{w^2}{2u} f(r, u) \right) r^{N-1} dr \\ &= -\frac{\sigma^{N-1}}{2} [(u'_-)^2 + (u'_+)^2] \delta + o(\delta). \quad (2.32) \end{aligned}$$

Agora estimamos a segunda integral em (2.28). Como u é contínua e $u(\sigma) = 0$, além do que $\alpha(\delta), \beta(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$ pelo Lema 2.12, temos pela construção de w_δ que

$$\max_{|r-\sigma| \leq \delta} |w_\delta(r)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0.$$

Da continuidade de b em $[0, \infty)$, de F em $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ e da compacidade de $[\rho, \tau]$, concluímos que existem constantes $K(\delta)$ tais que

$$r \mapsto \frac{b(r)}{2} (w(r))^2 - F(r, w(r)) + F(r, u(r)), \quad r \in [\rho, \tau],$$

é limitada em módulo em $[\sigma - \delta, \sigma + \delta]$ por $K(\delta)$ para $\delta > 0$ suficientemente

2.3 Existência de soluções nodais em \mathbb{R}^N

pequeno e $K(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0$. Consequentemente

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \left(\frac{b(r)}{2} w^2 - F(r, w) + F(r, u) \right) r^{N-1} dr \right| \\ & \leq K(\delta) \int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} r^{N-1} dr \\ & = K(\delta) ((\sigma + \delta)^N - (\sigma - \delta)^N) / N \\ & = o(1) \cdot \delta \cdot O(1), \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \left(\frac{b(r)}{2} w^2 - F(r, w) + F(r, u) \right) r^{N-1} dr = o(\delta). \quad (2.33)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} \frac{1}{2} |w'|^2 r^{N-1} dr &= \frac{(\alpha(\delta))^2}{2} \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} (v')^2 r^{N-1} dr \\ &= \frac{(\alpha(\delta))^2 (u(\sigma + \delta) - u(\sigma - \delta))^2}{8\delta^2} \left(\frac{(\sigma + \delta)^N}{N} - \frac{\sigma^N}{N} \right) \\ &= \frac{(1 + o(1))\delta^2 (u'_+ + u'_- + o(1))^2}{8\delta^2} (\delta\sigma^{N-1} + o(\delta)) \\ &= \frac{\sigma^{N-1}}{8} (u'_+ + u'_-)^2 \delta + o(\delta). \end{aligned}$$

Analogamente mostramos que

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\delta} \frac{1}{2} |w'|^2 r^{N-1} dr = \frac{\sigma^{N-1}}{8} (u'_+ + u'_-)^2 \delta + o(\delta),$$

de onde vem

$$\int_{\sigma-\delta}^{\sigma+\delta} \frac{1}{2} |w'|^2 r^{N-1} dr = \frac{\sigma^{N-1}}{4} (u'_+ + u'_-)^2 \delta + o(\delta). \quad (2.34)$$

Substituindo (2.32)–(2.34) em (2.28), obtemos

$$\psi(w) \leq \psi(u) - \frac{\sigma^{N-1}}{4} (2(u'_+)^2 + 2(u'_-)^2 - (u'_+ + u'_-)^2) \delta + o(\delta).$$

Assim, se $u'_+ \neq u'_-$, então $\psi(w_\delta) < \psi(u)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, uma contradição com (2.27). Portanto $u'_+ = u'_-$, o que completa a prova de que u é uma solução radial clássica do problema (2.1).

Observação. Segundo Liu & Wang [18], é possível encontrar soluções radiais nodais com qualquer quantidade finita prescrita de nós de forma mais direta, trabalhando com subconjuntos apropriados da variedade de Nehari. A vantagem de um argumento desse tipo é que ele evita o longo argumento de regularização desenvolvido nesta seção.

2.4 Comparação das energias

2.4 Comparação das energias

Apresentamos a seguir três observações importantes a respeito das energias das soluções nodais encontradas na seção anterior. Destacamos a Proposição 2.5, pela qual as soluções nodais obtidas na seção anterior têm todas energias distintas.

A Proposição 2.4 é consequência direta da Proposição 2.6 mas entendemos que a prova inspirada diretamente pela Proposição 2.2 é mais ilustrativa.

Denotamos $\Lambda_0^\pm = \lambda^\pm(0, \infty)$ e $\Lambda_k^\pm = \Lambda^\pm(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k)$, onde $(\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k)$ é dado pelo Lema 2.9, $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.4. $\Lambda_k^+ \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$.

Demonstração. Seja $(\Lambda_{k_l}^+)_{l \in \mathbb{N}}$ uma subsequência qualquer de $(\Lambda_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$. Dividimos a prova em três casos.

(I) $\bar{\rho}_{k_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$.

(II) Existe $M > 0$ tal que $\bar{\rho}_{k_l} \leq M$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

(III) Nem (I) nem (II) se verificam.

(I) Neste caso temos que $\Lambda_{k_l}^+ \geq \lambda^{\epsilon_{k_l}}(\bar{\rho}_{k_l}, \infty) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ pelo item (c) da Proposição 2.2, portanto $\Lambda_{k_l}^+ \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$.

(II) Aqui o menor dos comprimentos $\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j$, $j = 0, 1, \dots, k_l$, tende a 0 quando $l \rightarrow \infty$. Segue pelo item (b) da Proposição 2.2 que $\Lambda_{k_l}^+ \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$.

(III) Se nem (I) nem (II) se verificam para $(\Lambda_{k_l}^+)_{l \in \mathbb{N}}$, então (I) ou (II) se verifica para alguma subsequência de $(\Lambda_{k_l}^+)_{l \in \mathbb{N}}$, que tende a infinito pelo que provamos nos dois casos anteriores.

Em resumo, toda subsequência de $(\Lambda_k^+)_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que tende a infinito. Logo $\Lambda_k^+ \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. ■

Agora provamos que, de fato, $\Lambda_k^+ \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ monotonicamente.

Proposição 2.5. $\Lambda_k^+ < \Lambda_{k+1}^+$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. Dado $j \in \mathbb{N}$, sejam $\rho_1^{(j)}, \dots, \rho_j^{(j)}$ os j nós de uma solução u_j^+ de (2.1) como a construída na seção anterior. Fixemos arbitrariamente

2.4 Comparação das energias

$k \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $\Lambda_k^+ = \varphi(u_k^+) < \varphi(u_{k+1}^+) = \Lambda_{k+1}^+$. Ora,

$$\begin{aligned}
 \Lambda_k^+ &= \sum_{j=0}^k \lambda^{\epsilon_j}(\rho_j^{(k)}, \rho_{j+1}^{(k)}) \\
 &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{\epsilon_j}(\rho_j^{(k+1)}, \rho_{j+1}^{(k+1)}) + \lambda^{\epsilon_k}(\rho_k^{(k+1)}, \infty) \\
 &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{\epsilon_j}(\rho_j^{(k+1)}, \rho_{j+1}^{(k+1)}) + \lambda^{\epsilon_k}(\rho_k^{(k+1)}, \rho_{k+1}^{(k+1)}) \\
 &< \sum_{j=0}^k \lambda^{\epsilon_j}(\rho_j^{(k+1)}, \rho_{j+1}^{(k+1)}) + \lambda^{\epsilon_{k+1}}(\rho_{k+1}^{(k+1)}, \infty) \\
 &= \Lambda_{k+1}^+.
 \end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue imediatamente da definição de Λ_k^+ (veja Figuras 2.1 e 2.2). A segunda segue do item (a) da Proposição 2.2 (veja Figura 2.3). A terceira decorre do fato de que $\lambda^{\epsilon_{k+1}}(\rho_{k+1}^{(k+1)}, \infty) > 0$. ■

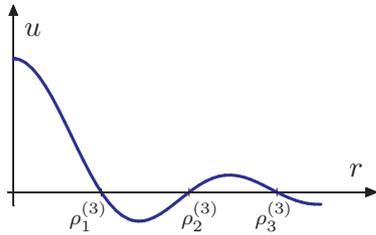


Figura 2.1: Solução u_3^+ .

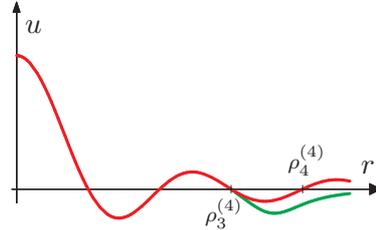


Figura 2.2: Solução u_4^+ com a solução negativa em $\Omega(\rho_3^{(3)}, \infty)$.

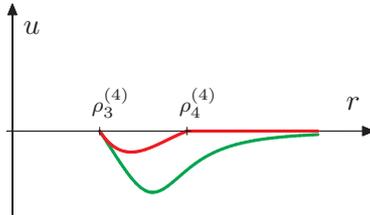


Figura 2.3: Solução negativa em $\Omega(\rho_3^{(4)}, \infty)$ com a solução negativa em $\Omega(\rho_3^{(4)}, \rho_4^{(4)})$.

2.5.1 Resultados de Teoria de Regularidade

Proposição 2.6. $\Lambda_k^+ \geq [(k+1)/2]\Lambda_0^+ + \lfloor (k+1)/2 \rfloor \Lambda_0^-$, $k = 0, 1, 2, \dots$, onde $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x e $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x para cada $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Basta notar que $\Lambda_0^+ \leq \lambda^+(\rho_j^{(k)}, \rho_{j+1}^{(k)})$ para cada $j \in \{0, \dots, k\}$ par e $\Lambda_0^- \leq \lambda^-(\rho_j^{(k)}, \rho_{j+1}^{(k)})$ para cada $j \in \{0, \dots, k\}$ ímpar. ■

Resultados análogos são válidos para as soluções radiais u_k^- satisfazendo $u_k^-(0) < 0$.

2.5 Regularidade

2.5.1 Resultados de Teoria de Regularidade

Primeiramente, recordamos alguns teoremas de regularização de soluções para problemas elípticos. Dado um aberto limitado $U \subseteq \mathbb{R}^N$, dizemos que uma função $\psi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory se $x \mapsto \psi(x, u)$, $x \in U$, é mensurável para cada $u \in \mathbb{R}$ e $u \mapsto \psi(x, u)$, $x \in U$, é contínua para cada $x \in U$.

Lema 2.13 (Brézis-Kato). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\psi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Caratheodory, e suponhamos que exista $a \in L^{N/2}(U)$ tal que, para cada $u \in \mathbb{R}$,*

$$|\psi(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|), \quad \text{para quase todo } x \in U.$$

Se $u \in H_0^1(U)$ é uma solução fraca de

$$-\Delta u = \psi(x, u)$$

em U , então $u \in L^p$ para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Veja [23, Lemma B.3, págs. 244–245]. ■

Lema 2.14. *Sejam $N \geq 2$, $B = B(x_0, \delta)$ uma bola aberta de centro $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e raio $\delta > 0$, $p, q > 1$ e $u \in L_{loc}^q(B)$. Se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_B u(x) \Delta v(x) dx \right| \leq C \|v\|_{L^{p'}(B)}, \quad v \in C_c^\infty(B),$$

então $u \in W_{loc}^{2,p}(B)$.

Demonstração. Conferir [2, Theorem 6.1, pág. 428–431]. ■

Dados $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^N$, denotamos por $C_B^j(U)$ o espaço (de Banach) das funções reais em U com derivadas parciais até ordem j limitadas, com a norma

$$\|u\|_{C_B^j(U)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in U} |D_\alpha(x)|, \quad u \in C_B^j(U),$$

(conferir Adams [1, ¶ 5.2, páginas 95–96]).

2.5.2 Regularidade das soluções radiais

Teorema 2.2 (da Imersão de Sobolev). *Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e cada $\delta > 0$, a imersão $W^{2,p}(B(x_0, \delta)) \hookrightarrow C_B^1(B(x_0, \delta))$ é contínua sempre que $p > N$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 5.4, Case C, pág. 97], onde o resultado é apresentado em uma forma mais geral. ■

Embora o próximo resultado somente seja usado no próximo capítulo, na prova da regularidade para soluções não-radiais, achamos conveniente enunciá-lo juntamente com os demais resultados abstratos de Teoria de Regularidade usados neste trabalho.

Teorema 2.3. *Sejam $N \geq 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto conexo e limitado, $1 < p < \infty$, $u \in W^{2,p}(U)$, $0 < \gamma < 1$ e $f \in C^{0,\gamma}(U)$. Se u é uma solução fraca de $-\Delta u = f$ em U , então $u \in C^{2,\gamma}(U)$.*

Demonstração. Conferir [12, Theorem 9.19, pág. 243]. ■

2.5.2 Regularidade das soluções radiais

Assumindo que soluções fracas radiais de

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = g(|x|, u) \\ u \in H_0^1(\Omega(\rho, \sigma)) \end{cases}$$

fossem de classe C^2 em $\Omega(\rho, \sigma)$, $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$, dado $k \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, mostramos na Seção 2.3 que a função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por (2.22) é uma solução clássica radial de (2.1) com exatamente k nós. Resta-nos, portanto, provar o

Lema 2.15. *Se b, f satisfazem (b_0) e (f_1) – (f_5) , $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$ e $u \in E(\rho, \sigma)$ é uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in H_0^1(\Omega(\rho, \sigma)) \end{cases}, \quad (2.35)$$

então u é de classe C^2 em $\Omega(\rho, \sigma)$.

Dividimos a demonstração do Lema 2.15 em vários lemas, nos quais aplicamos os resultados enunciados na subseção anterior para obter, a cada vez, mais regularidade para u .

Lema 2.16. *Sob as hipóteses do Lema 2.15, temos que $u \in L^p(B(x_0, \delta))$, $p \geq 1$, para todos $x \in \Omega(\rho, \sigma)$ e $\delta > 0$ tais que $B(x_0, \delta) \subseteq \Omega(\rho, \sigma)$.*

Demonstração. Em vista do Lema 2.13, basta mostrarmos que a função $a : B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(x) = \frac{|f(|x|, u(x)) - b(|x|)u(x)|}{1 + |u(x)|}, \quad x \in B(x_0, \delta),$$

2.5.2 Regularidade das soluções radiais

está em $L^{N/2}(B(x_0, \delta))$. Por um lado, existe uma constante $M = M(x_0, \delta) > 0$ tal que $b(|x|) \leq M$ para cada $x \in B(x_0, \delta)$, pois b é contínua e $B(x_0, \delta)$ é limitado. Portanto

$$\left| \frac{b(|x|)u(x)}{1 + |u(x)|} \right| \leq M, \quad x \in B(x_0, \delta),$$

de onde segue que

$$x \mapsto \frac{b(|x|)u(x)}{1 + |u(x)|}, \quad x \in B(x_0, \delta),$$

está em $L^r(B(x_0, \delta))$ para todo $r \geq 1$; em particular, está em $L^{N/2}(B(x_0, \delta))$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, \delta)} \left(\frac{|f(|x|, u(x))|}{1 + |u(x)|} \right)^{\frac{N}{2}} dx &\leq \int_{B(x_0, \delta)} \left(\frac{|u(x)| + A|u(x)|^s}{1 + |u(x)|} \right)^{\frac{N}{2}} dx \\ &\leq \overline{C} \int_{B(x_0, \delta)} \left(\frac{1 + |u(x)|^s}{1 + |u(x)|} \right)^{\frac{N}{2}} dx \\ &\leq \overline{C} \int_{B(x_0, \delta)} \left(1 + \frac{|u(x)|^s}{1 + |u(x)|} \right)^{\frac{N}{2}} dx \\ &\leq \overline{C} \int_{B(x_0, \delta)} \left(1 + |u(x)|^{s-1} \right)^{\frac{N}{2}} dx \\ &\leq 2^{\frac{N}{2}-1} \overline{C} \int_{B(x_0, \delta)} \left(1 + |u(x)|^{(s-1)N/2} \right) dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

pois $(s-1)N/2 < 2^*$.² Isto prova que

$$x \mapsto \frac{f(|x|, u(x))}{1 + |u(x)|}, \quad x \in B(x_0, \delta),$$

está em $L^{N/2}(B(x_0, \delta))$ e completa a demonstração do Lema 2.16. ■

Lema 2.17. *Sob as hipóteses do Lema 2.15, temos que $u \in W^{2,p}(B(x_0, \delta))$, $p > 1$, para todos $x \in \Omega(\rho, \sigma)$ e $\delta > 0$ tais que $\overline{B(x_0, \delta)} \subseteq \Omega(\rho, \sigma)$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.13, temos $u \in L^q(B(x_0, \delta))$ para cada $q > 1$. Assim, em virtude do Lema 2.14, basta mostrarmos que existe $C \geq 0$ tal que

$$\left| \int_{B(x_0, \delta)} u(x) \Delta v(x) dx \right| \leq C \|v\|_{L^{p'}(B(x_0, \delta))}, \quad v \in C_c^\infty(B(x_0, \delta)), \quad p > 1.$$

²Nos cálculos acima, podemos tomar $\overline{C} = 1 + A$.

2.5.2 Regularidade das soluções radiais

Afirmamos que

$$\int_{B(x_0, \delta)} u \Delta v \, dx = - \int_{B(x_0, \delta)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad v \in C_c^\infty(B(x_0, \delta)). \quad (2.36)$$

Com efeito, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $C^1(B(x_0, \delta)) \cap H^1(B(x_0, \delta))$ convergente a u no sentido de H^1 . Temos

$$\int_{B(x_0, \delta)} u_n \Delta v \, dx = - \int_{B(x_0, \delta)} \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx, \quad v \in C_c^\infty(B(x_0, \delta)),$$

pelo Teorema da Divergência. Por outro lado

$$\int_{B(x_0, \delta)} u_n \Delta v \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_0, \delta)} u \Delta v \, dx$$

e

$$\int_{B(x_0, \delta)} \nabla u_n \cdot \nabla v \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{B(x_0, \delta)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad v \in C_c^\infty(B(x_0, \delta)),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Por (2.36) e pela hipótese de que u é solução fraca de (2.35), obtemos

$$\left| \int_{B(x_0, \delta)} u \Delta v \, dx \right| = \left| \int_{B(x_0, \delta)} (f(|x|, u)v - b(|x|)uv) \, dx \right|.$$

Como $u \in L^q(B(x_0, \delta))$ para cada $q > 1$ e f satisfaz (f_1) – (f_5) , segue pela estimativa no Lema B.2 que $f(|\cdot|, u) \in L^q(B(x_0, \delta))$ para cada $q > 1$. Aplicando a desigualdade de Hölder ao segundo membro na igualdade acima vem, finalmente,

$$\left| \int_{B(x_0, \delta)} u \Delta v \, dx \right| \leq C \|v\|_{L^{p'}(B(x_0, \delta))}, \quad v \in C_c^\infty(B(x_0, \delta)),$$

onde podemos escolher $C = \|f(|\cdot|, u)\|_{L^p(B(x_0, \delta))} + \|b(|\cdot|)u\|_{L^p(B(x_0, \delta))}$. Isso completa a demonstração do Lema 2.17. ■

Lema 2.18. *Sob as hipóteses do Lema 2.15, temos que $u \in C^1(\Omega(\rho, \sigma))$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que cada ponto $x_0 \in \Omega(\rho, \sigma)$ tem uma vizinhança na qual u é de classe C^1 . Ora, dado um tal x_0 , sejam $\delta > 0$ tal que $\bar{B}(x_0, \delta) \subseteq \Omega(\rho, \sigma)$ e $p > N$. Pelo Lema 2.17, $u \in W^{2,p}B(x_0, \delta)$. Segue pelo Teorema 2.2 que u é de classe C^1 em $B(x_0, \delta)$, o que completa a demonstração. ■

2.5.2 Regularidade das soluções radiais

Demonstração do Lema 2.15. Pelo Lema 2.18, temos $u \in C^1(\Omega(\rho, \sigma))$. A igualdade

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f(|x|, u) - b(|x|)u)v \, dx, \quad v \in C_c^\infty(\Omega),$$

é válida pela definição de solução fraca. Consideremos os representantes $\tilde{u}, \tilde{v} : (\rho, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ de u e v , respectivamente, na reta. A igualdade acima escrita em sua forma polar é dada por

$$\int_{\rho}^{\sigma} r^{N-1} \tilde{u}' \tilde{v}' \, dr = \int_{\rho}^{\sigma} r^{N-1} (f(r, \tilde{u}) - b(r)\tilde{u}) \tilde{v} \, dr, \quad v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Notemos que a função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $v(x) = \tilde{v}(|x|)$, $x \in \Omega$, está em $C_c^\infty(\Omega)$ sempre que $\tilde{v} \in C_c^\infty((\rho, \sigma))$. Segue pela igualdade acima que $r \mapsto r^{N-1} \tilde{u}'(r)$, $r \in (\rho, \sigma)$, é fracamente diferenciável e

$$-(r^{N-1} \tilde{u}'(r))' = r^{N-1} (f(r, \tilde{u}(r)) - b(r)\tilde{u}(r)), \quad r \in (\rho, \sigma). \quad (2.37)$$

Integrando ambos membros de r_0 a r , onde $r_0 \in (\rho, \sigma)$ é fixado arbitrariamente e $r \in (\rho, \sigma)$ é livre, obtemos

$$\tilde{u}'(r) = \frac{r_0^{N-1} \tilde{u}'(r_0)}{r^{N-1}} - \frac{1}{r^{N-1}} \int_{r_0}^r s^{N-1} (f(s, \tilde{u}(s)) - b(s)\tilde{u}(s)) \, ds, \quad r \in (\rho, \sigma).$$

O restante da prova é dividido em dois casos.

(I) Se $\rho > 0$, então nada mais há para ser feito. A continuidade de f , \tilde{u} e a expressão acima para \tilde{u}' no intervalo (ρ, σ) , juntamente com o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia, nos permitem concluir que \tilde{u}' é derivável e sua derivada é contínua no intervalo (ρ, σ) . Assim, como $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, $x \in \Omega$, concluímos que u é de classe C^2 na região anular $\Omega(\rho, \sigma)$.

(II) Caso tenhamos $\rho = 0$, o mesmo argumento em (I) nos permite concluir que u é de classe C^2 em $\Omega(0, \sigma) \setminus \{0\}$ e falta, portanto, considerar a diferenciabilidade de u até segunda ordem na origem.

Mostramos, primeiramente, que \tilde{u}' tem derivada à direita finita em $r = 0$.

Como u é solução clássica de

$$-\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u)$$

em $\Omega(\rho, \sigma) \setminus \{0\}$, considerando sua forma polar, concluímos que

$$\tilde{u}''(r) = -\frac{N-1}{r} \tilde{u}'(r) + b(r)\tilde{u}(r) - f(r, \tilde{u}(r)), \quad r \in (0, \sigma). \quad (2.38)$$

Escrevamos $f(r, \tilde{u}(r)) - b(r)\tilde{u}(r) = w(r)$. Integrando ambos membros de (2.37) de 0 a r e fazendo a mudança de variável de integração de s para tr , obtemos

$$\tilde{u}'(r) = -\int_0^r \frac{s^{N-1}}{r^{N-1}} w(s) \, ds = -\int_0^1 t^{N-1} w(tr) r \, dt.$$

2.5.2 Regularidade das soluções radiais

Como $t^{N-1}w(tr) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0$ para todo $t \in [0, 1]$ e a expressão $t^{N-1}w(tr)$ está limitada para $r > 0$ pequeno, pois w é contínua, segue que

$$\frac{\tilde{u}'(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0 \quad (2.39)$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Substituindo este resultado em (2.38), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \tilde{u}''(r) = 0, \quad (2.40)$$

o que quer dizer que $\tilde{u}'(r)$ é derivável à direita em $r = 0$ e $\tilde{u}''_+(0) = 0$. (Conferir Lema 2.10.)

Cálculos rotineiros usando a identidade $u(x) = \tilde{u}(|x|)$, a definição de derivada, a Regra da Cadeia e as relações (2.38) e (2.40) nos dão

$$u_{x_j x_k}(0) = 0, \quad j, k = 1, \dots, N,$$

e, para $x \neq 0$,

$$u_{x_j x_k}(x) = \begin{cases} \left(-N \frac{\tilde{u}'(|x|)}{|x|} - w(|x|) \right) \frac{x_j^2}{|x|^2} - \frac{\tilde{u}'(x)}{|x|}, & j = k, \\ \left(-N \frac{\tilde{u}'(|x|)}{|x|} - w(|x|) \right) \frac{x_j x_k}{|x|^2}, & j \neq k. \end{cases}$$

Levando em consideração (2.39) e que

$$\left| \frac{x_j x_k}{|x|^2} \right| \leq 1, \quad x \neq 0, \quad j, k = 1, \dots, N,$$

concluimos que

$$u_{x_j x_k}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = u_{x_j x_k}(0), \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Isto completa a prova da existência e continuidade das derivadas parciais até segunda ordem de u na origem, o que completa a demonstração do Lema 2.15. ■

Capítulo 3

Soluções não-Radiais

Agora que sabemos que, sob as hipóteses (b_0) e (f_1) – (f_5) , o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + b(|x|)u = f(|x|, u) \\ u \in C^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3.1)$$

possui soluções radiais—o enunciado preciso está no Teorema 2.1—, uma questão que surge naturalmente é a da existência ou não de soluções não-radiais. Neste capítulo, mostramos que também é possível encontrar soluções não-radiais para o problema (3.1), desde que se faça uma pequena alteração na hipótese (f_5) . Mais especificamente, supomos que b, f satisfazem (b_0) , (f_1) – (f_4) e que,

(f'_5) para cada $r \geq 0$, a função $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}$ é ímpar e não-decrescente com respeito à variável u , isto é,

$$f(r, -u) = -f(r, u), \quad r \geq 0, u \in \mathbb{R},$$

e

$$f(r, u_1) \leq f(r, u_2), \quad r \geq 0, u_1 \leq u_2.$$

Com o intuito de obter uma solução clássica,¹ também supomos que f é Hölder-contínua de expoente $\theta \in (0, 1)$ com respeito à variável u , ou seja, supomos que existe um $K > 0$ tal que

$$|f(r, u_1) - f(r, u_2)| \leq K |u_1 - u_2|^\theta, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Mais precisamente, provamos o

Teorema 3.1. *Se $N \in \mathbb{N}$ satisfaz $N = 4$ ou $N \geq 6$, b, f satisfazem (b_0) , (f_1) – (f_4) e (f'_5) , e f é Hölder-contínua de expoente $\theta \in (0, 1)$ com respeito à variável u (satisfaz (3.2) para algum $K > 0$), então o problema (3.1) possui, ao menos, uma solução clássica não-radial.*

¹O argumento utilizado na Subseção 2.5.2 para mostrar que uma solução de classe C^1 tem que ser de classe C^2 não funciona no caso não-radial e precisamos aplicar um argumento do tipo *bootstrap*.

3.1 O Lema de Lions

Bartsch & Willem [5] provaram que, sob as mesmas hipóteses, o problema (3.1) possui uma sequência ilimitada (em $X = X(0, \infty)$) de soluções clássicas não-radiais. Em seu trabalho, os autores usam o Teorema da Fonte.

A lacuna do $N = 5$ no enunciado acima é uma limitação do método utilizado e poderá ser melhor entendida mais adiante. Em um trabalho de 2004, Lorca & Ubilla [17] mostram que também é possível encontrar soluções não-radiais quando $N = 5$.

É interessante que o problema (3.1) possa ter soluções não-radiais, uma vez que a própria equação no problema é invariante por transformações lineares ortogonais.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na **Seção 3.1**, apresentamos o Lema de Lions, que é usado na **Seção 3.2** para obter imersões compactas em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < 2^*$, de subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$ maiores que o das funções radiais. Em seguida, o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais é estudado na **Seção 3.3**. Na **Seção 3.4**, obtemos uma solução não-radial fraca para o problema (3.1) e mostramos que ela é, de fato, uma solução clássica na **Seção 3.5**.

3.1 O Lema de Lions

O Lema de Lions (Lema 3.3) é um resultado técnico que será usado na próxima seção para estabelecer que as imersões em $L^p(\mathbb{R}^N)$ de alguns subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$ de funções satisfazendo condições de simetria mais fracas que a satisfeita pelas funções radiais ainda são compactas para $2 < p < 2^*$. Começamos com um outro resultado técnico a respeito de coberturas de \mathbb{R}^N por bolas abertas de mesmo raio.

Lema 3.1. *Dado $r > 0$, existe uma cobertura enumerável de \mathbb{R}^N por bolas abertas de raio r tal que cada ponto de \mathbb{R}^N está em, no máximo, 4^N bolas da cobertura.*

Demonstração. Escrevamos $d = r/2$ e ponhamos

$$Q = \{(k_1d, \dots, k_Nd); k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}\}.$$

Consideremos a cobertura (enumerável) de \mathbb{R}^N constituída das bolas $B(q, r)$, $q \in Q$. Dado $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ qualquer, sejam $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_N \in \mathbb{Z}$ tais que

$$y \in [\bar{k}_1d, (\bar{k}_1 + 1)d] \times \dots \times [\bar{k}_Nd, (\bar{k}_N + 1)d].$$

Dado $q = (k_1d, \dots, k_Nd) \in Q$, se $k_j \leq \bar{k}_j - 2$ para algum $j \in \{1, \dots, N\}$, então $|y - q| \geq |y_j - k_jd| \geq 2d = r$, de modo que $y \notin B(q, r)$. Da mesma forma, se $k_j \geq \bar{k}_j + 3$, então $y \notin B(q, r)$. Em outros termos, se $y \in B(q, r)$, então $\bar{k}_j - 1 \leq k_j \leq \bar{k}_N + 2$ para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, de modo que existem, no máximo, 4^N bolas nas quais y possa estar. ■

3.1 O Lema de Lions

Na verdade existe uma cobertura de \mathbb{R}^N por bolas abertas de mesmo raio $r > 0$ em que cada ponto de \mathbb{R}^N está em, no máximo, $N + 1$ bolas da cobertura. Mas tamanha precisão é desnecessária para nossos propósitos e a construção seria bem mais elaborada e difícil de formalizar.

Uma cobertura como a do Lema 3.1 induz naturalmente uma partição de \mathbb{R}^N .

Lema 3.2. *Seja $(B(y, r))_{y \in Y}$ uma cobertura de \mathbb{R}^N por bolas de mesmo raio $r > 0$ tal que cada ponto de \mathbb{R}^N esteja em, no máximo, $K \in \mathbb{N}$ bolas da cobertura. Então existe uma partição enumerável $(P_z)_{z \in Z}$ de \mathbb{R}^N tal que*

- (i) $P_z \cap B(y, r) = P_z$ ou $P_z \cap B(y, r) = \emptyset$ para cada $y \in Y$ e cada $z \in Z$.
- (ii) Para cada $z \in Z$, P_z está contido em, no máximo, K bolas da cobertura.

Demonstração. Na demonstração deste lema, escreveremos $B(y, r) = B_y$ por simplicidade de notação.

(I) Para cada $y \in Y$, seja

$$Y_y = \{y' \in Y; B_y \cap B_{y'} \neq \emptyset\} \setminus \{y\}.$$

Para cada $z \in \mathbb{R}^N$, sejam $C_z \subseteq Y$ o subconjunto dos centros das bolas da cobertura às quais z pertence,

$$Z_z = \bigcup_{y \in C_z} Y_y - C_z$$

e

$$P_z = \bigcap_{y \in C_z} B_y - \bigcup_{y \in Z_z} B_y.$$

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$, mostremos que $P_{z_1} = P_{z_2}$ ou $P_{z_1} \cap P_{z_2} = \emptyset$. De fato, se existe $z_0 \in P_{z_1} \cap P_{z_2} \neq \emptyset$, então

$$z_0 \in P_{z_1} \subseteq \bigcup_{y \in C_{z_1}} B_y,$$

logo $C_{z_1} \subseteq C_{z_0}$. Suponhamos, ao contrário, que $C_{z_0} \not\subseteq C_{z_1}$ e seja $y \in C_{z_0} \setminus C_{z_1}$. Temos que $z_0 \in B_y \cap B_{y'} \neq \emptyset$ para cada $y' \in C_{z_1}$, logo $y \in Z_{z_1}$. Mas, então,

$$z_0 \notin P_{z_1} = \bigcap_{y' \in C_{z_1}} B_{y'} - \bigcup_{y' \in Z_{z_1}} B_{y'},$$

uma contradição. Concluimos que $C_{z_1} = C_{z_0}$. Consequentemente, $Z_{z_1} = Z_{z_0}$, de onde segue que $P_{z_1} = P_{z_0}$. Analogamente, mostramos que $P_{z_2} = P_{z_0}$, de onde concluimos que, de fato, $P_{z_1} = P_{z_2}$.

3.1 O Lema de Lions

Em virtude disso, a relação R definida por

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow P_{z_1} \cap P_{z_2} \neq \emptyset$$

é uma relação de equivalência em \mathbb{R}^N . Seja $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto constituído de representantes distintos dois a dois das classes de equivalência determinadas pela relação. Então $(P_z)_{z \in Z}$ é uma partição de \mathbb{R}^N .

(II) Para ver que Z é enumerável, primeiramente notemos que Y é enumerável. Com efeito, se Y não fosse enumerável, então teria um ponto de acumulação, que estaria em uma infinidade de bolas da cobertura. Em particular, a quantidade de subconjuntos de Y com, no máximo, K elementos é enumerável.

Agora notemos que, para cada $z \in Z$, o conjunto P_z é unicamente determinado por C_z , o conjunto dos centros das bolas da cobertura que contém z ; ou seja, se $z_1, z_2 \in Z$ são distintos, então $C_{z_1} \neq C_{z_2}$. Como $C_z \subseteq Y$ e $\#C_z \leq K$ para cada $z \in Z$, concluímos que Z tem uma quantidade enumerável de elementos.

(III) Agora sejam $z \in Z$ e $y \in Y$ quaisquer. Pela construção em (I), se $y \in C_z$, então $P_z \subseteq B_y$; em particular, $P_z \cap B_y = P_z$. E, se $y \notin C_z$, então $P_z \cap B_y = \emptyset$. Com efeito, se existisse $z_0 \in P_z \cap B_y \neq \emptyset$, então teríamos $P_z = P_{z_0}$ e $C_z = C_{z_0}$, pois $z_0 \in P_z$, e também teríamos $y \in C_{z_0} = C_z$, pois $z_0 \in B_y$, uma contradição. Isto prova (i).

Pelo argumento acima, P_z está contido em exatamente $\#C_z \leq K$ bolas da cobertura, o que nos dá (ii) e completa a demonstração do Lema 3.2. ■

Lema 3.3 (Lions). *Se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e existem $r > 0$ e $q \in [2, 2^*)$ tais que*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u_n\|_{L^q(B(y,r))}^q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

então $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ sempre que $2 < p < 2^*$.

Demonstração. (I) Suponhamos, primeiramente, que $N \geq 3$. Tomemos $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ arbitrariamente e $s \in (q, 2^*)$ a ser fixado posteriormente. Pelas desigualdades de Hölder e Sobolev, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^s(B(y,r))} &= \left[\int_{B(y,r)} |u|^{s(1-\lambda)} |u|^{s\lambda} dx \right]^{1/s} \\ &\leq \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{1-\lambda} \|u\|_{L^{2^*}(B(y,r))}^\lambda \\ &\leq \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{1-\lambda} (c(2^*))^\lambda \left[\int_{B(y,r)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right]^{\lambda/2}, \end{aligned}$$

3.1 O Lema de Lions

onde

$$\lambda = \frac{s-q}{2^* - q} \cdot \frac{2^*}{s} < 1$$

é escolhido de modo que se tenha

$$\frac{s(1-\lambda)}{q} + \frac{s\lambda}{2^*} = 1.$$

Tomando

$$s = \frac{2}{2^*}(2^* - q) + q \in (q, 2^*),$$

temos que $\lambda = 2/s$, logo

$$\int_{B(y,r)} |u|^s dx \leq c_1 \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \int_{B(y,r)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx, \quad (3.3)$$

onde $c_1 = (c(2^*))^{s\lambda}$.

(II) Pelo Lema 3.1, existe uma cobertura $(B(y_n, r))_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^N tal que cada ponto de \mathbb{R}^N está em, no máximo, 4^N das bolas da cobertura. E, pelo Lema 3.2, existe uma partição $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^N tal que

- (i) $P_k \cap B(y_n, r) = P_k$ ou $P_k \cap B(y_n, r) = \emptyset$ para todos $n, k \in \mathbb{N}$.
- (ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, P_k está contido em, no máximo, 4^N das bolas na cobertura.

Segue por (3.3) que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B(y_n, r)} |u|^s dx \\ &\leq c_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B(y_n, r)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \\ &= c_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(y_n, r) \cap P_k} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \\ &\leq c_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \right) \sum_{k=1}^{\infty} 4^N \int_{P_k} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \\ &= 4^N c_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\lambda)s} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx. \end{aligned}$$

Isso mostra que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Para completar a demonstração do Lema 3.3, resta-nos considerar os valores de p em $(2, s)$ ou $(s, 2^*)$.

3.2 Simetria e compacidade

(III) Suponhamos que $2 < p < s$. Como em (I), usando as desigualdades de Hölder e Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx &\leq \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1-\lambda_1} \|u_n\|_{L^s(\mathbb{R}^N)}^{\lambda_1} \\ &\leq (c(2) \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)})^{1-\lambda_1} \|u_n\|_{L^s(\mathbb{R}^N)}^{\lambda_1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{p-2}{s-2} \cdot \frac{s}{p}.$$

Portanto $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < s$. Analogamente, dado $p \in (s, 2^*)$, tomamos $r \in (p, 2^*)$ qualquer e aplicamos o mesmo raciocínio ao terno de expoentes (s, p, r) , com

$$\lambda_2 = \frac{p-s}{r-s} \cdot \frac{r}{p},$$

para concluir que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $s < p < 2^*$ também. ■

3.2 Simetria e compacidade

Nesta seção, generalizamos o Teorema de Strauss (Corolário 1 da Proposição 1.3 na página 1.3) para subespaços de funções de $H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo outras condições de simetria. As imersões compactas obtidas serão usadas na verificação da condição de Palais-Smale para o funcional φ restrito a um subespaço apropriado de $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuja única função radial é a função identicamente nula.

Dado $N \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $O(N)$ das transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^N sobre si mesmo. Sabemos que $O(N)$ constitui um grupo com a operação \circ de composição, que também indicaremos por $O(N)$ por simplicidade de notação. Este grupo é isomorfo ao grupo das matrizes reais $N \times N$ com determinante igual a ± 1 com a operação de multiplicação de matrizes. A natureza algébrica da abordagem requer algumas definições.

Definição 3.1. (a) Dados um subgrupo G de $O(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, definimos

$$\begin{aligned} m(y, r, G) &:= \sup\{n \in \mathbb{N}; \text{ existem } g_1, \dots, g_n \in G \text{ tais que} \\ &\quad j \neq k \Rightarrow B(g_j y, r) \cap B(g_k y, r) = \emptyset\}. \end{aligned}$$

(b) Dizemos que G é compatível com \mathbb{R}^N se existe $r > 0$ tal que

$$m(y, r, G) \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} \infty.$$

3.2 Simetria e compacidade

Definição 3.2. (a) *Sejam G um subgrupo de $O(N)$ e Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N . Dizemos que Ω é invariante por G se $g\Omega := \{gx; x \in \Omega\} = \Omega$ para cada $g \in G$.*

(b) *Neste caso, a ação de G sobre $H_0^1(\Omega)$ é definida por*

$$\begin{aligned} gu : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (gu)(x) = u(g^{-1}x) \end{aligned}$$

para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in G$.

(c) *O subespaço (fechado) de $H_0^1(\Omega)$ das funções invariantes por G é definido por*

$$H_{0,G}^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega); gu = u, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Proposição 3.1. *A Definição 3.2 está bem posta e $H_{0,G}^1(\Omega)$ com a norma induzida pela de $H_0^1(\Omega)$ constitui um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Precisamos mostrar que, dados um subgrupo G de $O(N)$ e um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ invariante por G ,

- (i) $gu \in H_0^1(\Omega)$ para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in G$ e
- (ii) $H_{0,G}^1(\Omega)$ é um subespaço vetorial fechado e, portanto, completo de $H_0^1(\Omega)$.

Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $H_0^1(\Omega)$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Dado $g \in G$, sejam

$$\begin{aligned} v_n : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u_n(g^{-1}x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Temos que $\text{supp } v_n = g \text{supp } u_n \subseteq \Omega$, logo $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Temos, ainda, que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito, g é uma transformação linear ortogonal de \mathbb{R}^N sobre si mesmo; em particular, é uma isometria. Como Ω é invariante por G , segue pelo Teorema de Mudança de Variáveis que

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|_{H^1}^2 &= \int_{\Omega} (|\nabla(v_n - v_m)|^2 + |v_n - v_m|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (|g\nabla(u_n - u_m)(g^{-1}(x))|^2 + |(u_n - u_m)(g^{-1}x)|^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla(u_n - u_m)(g^{-1}(x))|^2 + |(u_n - u_m)(g^{-1}x)|^2) dx \\ &= \|u_n - u_m\|_{H^1}^2 \\ &\xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

3.2 Simetria e compacidade

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ o limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que

$$v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(g^{-1}x) = u(g^{-1}x)$$

para quase todo $x \in \Omega$, o que prova que $gu = v \in H_0^1(\Omega)$.

A verificação de (ii) pode ser feita de modo inteiramente análogo à prova da Proposição 1.1, página 14. \blacksquare

Teorema 3.2. *Se G é um subgrupo de $O(N)$ compatível com \mathbb{R}^N , então as imersões*

$$H_G^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*,$$

são compactas.

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $H_{0,G}^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada qualquer. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u \in H_{0,G}^1$. Neste caso, $v_n := u_n - u \rightharpoonup 0$ e basta mostrarmos que isso implica que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 < p < 2^*$.

Dado $y \in \mathbb{R}^N$, sejam $g_1, \dots, g_{m(y,r,G)} \in G$ tais que $B(g_j y, r) \cap B(g_k y, r)$ sempre que $j, k \in \{1, \dots, m(y, r, G)\}$ e $j \neq k$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx = \frac{1}{m(y, r, G)} \sum_{j=1}^{m(y,r,G)} \int_{B(g_j y, r)} |v_n|^2 dx \leq \frac{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{H^1}^2}{m(y, r, G)} \quad (3.4)$$

pelo Teorema de Mudança de Variáveis, pois $v_n \in H_G^2(\mathbb{R}^N)$. Pela hipótese de que G é compatível com \mathbb{R}^N , temos que $m(y, r, G) \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} \infty$. Segue por (3.4) que, para cada $\epsilon > 0$, existe um $R = R(\epsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{|y| \geq R} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \leq \epsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Pelo Teorema de Imersão de Rellich-Kondrachov (veja os Teoremas A.1 e A.3), temos também que

$$\int_{B(0,R+r)} |v_n|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

em particular, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \leq \int_{B(0,R+r)} |v_n|^2 dx \leq \epsilon, \quad |y| \leq R, \quad n \geq n_0. \quad (3.6)$$

Combinando (3.5) e (3.6) obtemos

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

e o resultado almejado segue pelo Lema de Lions (Lema 3.3). \blacksquare

3.2 Simetria e compacidade

Este resultado generaliza o Teorema de Imersão obtido no Capítulo 1 para funções radiais:

Corolário 1. *Se $N_1, \dots, N_k \in \mathbb{N}$, $N_j \geq 2$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $N := N_1 + \dots + N_k$ e $G := O(N_1) \times \dots \times O(N_k)$, então as imersões*

$$H_G^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*,$$

são compactas.

Demonstração. Mostramos, primeiramente, que $O(2)$ é compatível com \mathbb{R}^2 . Dados $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, sejam $x_j := R(\cos(k2\pi/n), \text{sen}(k2\pi/n))$ e g_j uma transformação linear ortogonal de \mathbb{R}^2 sobre si mesmo levando o ponto $(1, 0)$ a x_j , $j = 0, 1, \dots, n$. Temos que

$$\begin{aligned} |x_{j+1} - x_j|^2 &= 2R^2[1 - (\cos((j+1)2\pi/n) \cos(j2\pi/n) \\ &\quad + \text{sen}((j+1)2\pi/n) \text{sen}(j2\pi/n))] \\ &= 2R^2(1 - \cos(2\pi/n)) \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Assim, para $R > 0$ suficientemente grande, se $|y| \geq R$, $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$ e $j_1 \neq j_2$, então $|x_{j_1} - x_{j_2}| \geq 2r$, de modo que $B(g_{j_1}y, r) \cap B(g_{j_2}y, r) = \emptyset$. Concluímos que $m(y, r, O(2)) \geq n$ sempre que $|y| \geq R$.

De modo parecido, mostramos que $O(M)$ é compatível com \mathbb{R}^M sempre que $M \geq 2$. Com efeito, dado $y \in \mathbb{R}^M$ com $|y| \geq R$, consideremos uma circunferência de centro em 0 e passando por y . O grupo $O(M)$ contém todas as rotações dessa circunferência. Assim, se R é suficientemente grande, então podemos obter $g_1, \dots, g_n \in O(M)$ tais que $B(g_{j_1}y, r) \cap B(g_{j_2}y, r) = \emptyset$ sempre que $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$ e $j_1 \neq j_2$, como no caso anterior. Portanto $m(y, r, O(M)) \geq n$.

Para o caso geral, dado $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_k}$ com $|y| \geq R > 0$, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $|y_j|_{\mathbb{R}^{N_j}} \geq R/\sqrt{k}$. Pelo parágrafo anterior, podemos tomar $R > 0$ tão grande que $m(\tilde{y}, r, O(N_{j'})) \geq n$ sempre que $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{N_{j'}}$ e $|\tilde{y}|_{\mathbb{R}^{N_{j'}}} \geq R/\sqrt{k}$, $j' = 1, \dots, k$. Assim, se $|y| \geq R$, então $m(y, r, G) \geq m(y_j, r, O(N_j)) \geq n$, o que completa a demonstração. ■

Corolário 2. *Se $N \geq 2$, então as imersões $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ são compactas sempre que $2 < p < 2^*$.*

Demonstração. Basta notar que, de acordo com a Definição 1.2, $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) = H_{O(N)}^1(\mathbb{R}^N)$ e aplicar o Corolário 1 com $N_1 = N$. ■

3.3 Princípio da Criticalidade Simétrica

3.3 Princípio da Criticalidade Simétrica

Nesta seção, introduzimos o Princípio da Criticalidade Simétrica e explicamos como aplicá-lo para concluir que os pontos críticos do funcional $\varphi|_E$ encontrados no Capítulo 2 também são pontos críticos de $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. O Princípio da Criticalidade Simétrica será usado novamente na próxima seção, onde finalmente provamos a existência de soluções não-radiais para o problema (3.1). Alguns preliminares algébricos são necessários.

Definição 3.3 (Ação de um Grupo sobre um Espaço Normado). (a)
Uma ação de um grupo sobre um espaço vetorial normado X é uma aplicação

$$(g, u) \mapsto g * u \in X, \quad (g, u) \in G \times X,$$

tal que

(i) $1 * u = u$ para todo $u \in X$,

(ii) $u \mapsto g * u$, $u \in X$, é linear e contínua para cada $g \in G$.

(b) A ação é dita isométrica se $\|g * u\|_X = \|u\|_X$ para todos $(g, u) \in G \times X$.

(c) O subespaço dos pontos de X invariantes pela ação de G é definido e denotado por

$$\text{Fix}(G) := \{u \in X; g * u = u \text{ para todo } g \in G\}.$$
²

Se $F \subseteq X$ é um subespaço, denotamos

$$\text{Fix}_F(G) := \{u \in F; g * u = u \text{ para todo } g \in G\}.$$

(d) Um funcional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dito invariante pela ação de G sobre X se $f(g * u) = f(u)$ para todos $(g, u) \in G \times X$.

Observação. 1. Por simplicidade de notação, o símbolo $*$ será omitido sempre que não houver perigo de confusão.

2. Em geral, pede-se que G seja um grupo topológico, que a aplicação $(g, u) \mapsto g * u$, $g \in G$, $u \in X$, seja contínua e satisfaça

$$h * (g * u) = (h * g)(u), \quad u \in X, \quad g, h \in G, \quad (3.7)$$

(ver [24, Definition 1.27, pág. 18]). Entretanto, embora seja natural considerar em $O(N)$ a topologia induzida por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}$, provar que a ação que definimos no Exemplo 3.1 é contínua seria um trabalho desnecessário, já que este fato não é usado no argumento que se segue. Além disso (3.7) não é necessariamente satisfeita pela ação no Exemplo 3.1 e não é hipótese essencial para que possamos provar o Princípio da Criticalidade Simétrica (Teorema 3.3).

²Como na prova da Proposição 1.1, pode-se mostrar com (ii) que, de fato, $\text{Fix}(G)$ é um subespaço vetorial fechado de X

3.3 Princípio da Criticalidade Simétrica

Exemplo 3.1. Consideremos o grupo $O(N)$, o espaço de Hilbert $X = X(\rho, \sigma)$ do Capítulo 2 e a aplicação

$$\begin{aligned} O(N) \times X &\longrightarrow X \\ (g, u) &\longmapsto \begin{array}{l} gu : \Omega(\rho, \sigma) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u(g^{-1}x). \end{array} \end{aligned}$$

Mostraremos que se trata de uma ação isométrica de $O(N)$ sobre X pela qual o funcional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ do Capítulo 2 é invariante e tal que $Fix(G) = E = E(\rho, \sigma)$.

A parte mais complicada é mostrar que a aplicação acima está bem definida, isto é, que $gu \in X$ para todos $(g, u) \in O(N) \times X$. Como foi visto na demonstração da Proposição 3.1, dados $g \in O(N)$ e $u \in X$, temos que $gu \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, como g é uma isometria de \mathbb{R}^N em \mathbb{R}^N , temos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla gu|^2 + b(|x|)|gu|^2) dx = \int_{\Omega} (|u|^2 + b(|x|)u^2) dx < \infty \quad (3.8)$$

pelo Teorema de Mudança de Variáveis, pois $\Omega = \Omega(\rho, \sigma)$ é radialmente simétrico (invariante por $O(N)$). Portanto $gu \in X$. A linearidade da aplicação no subitem (ii) do item (a) da Definição 3.3 é imediata. A equação (3.8) também nos mostra que a ação é uma isometria; em particular, $u \mapsto g * u$, $u \in X$, é contínua para cada $g \in G$. Conforme a Definição 1.2 de funções radiais, é claro que $Fix(O(N)) = E(\rho, \sigma)$. Usando mais uma vez que cada $g \in O(N)$ é uma isometria de \mathbb{R}^N , mais uma aplicação do Teorema de Mudança de Variáveis nos fornece o fato de que φ é invariante pela ação de G . \blacklozenge

Recordamos, a seguir, a definição de vetor gradiente para funcionais de classe C^1 em espaços de Hilbert arbitrários. Lembramos que, pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet [7, Teorema V.5, pág. 81], dados um espaço de Hilbert X e um funcional linear limitado $f \in X'$, existe um único $\hat{f} \in X$ tal que

$$\langle f, u \rangle = \langle \hat{f}, u \rangle_X, \quad u \in X.$$

Além disso, o isomorfismo entre X e X' assim definido é isométrico.

Sejam X um espaço de Hilbert, $U \subseteq X$ e $I \in C^1(U; \mathbb{R})$. Chamamos de gradiente de I a aplicação (contínua) $\nabla I : U \rightarrow X$ caracterizada por

$$\langle \nabla I(u), v \rangle_X = \langle I'(u), v \rangle, \quad u \in U, v \in X.$$

Teorema 3.3 (Princípio da Criticalidade Simétrica). *Suponhamos que uma ação de um grupo G sobre um espaço de Hilbert X seja isométrica. Se $I \in C^1(X; \mathbb{R})$ é invariante pela ação e $u_0 \in Fix(G)$ é um ponto crítico de $I|_{Fix(G)}$, então u_0 é um ponto crítico de I em X .*

3.3 Princípio da Criticalidade Simétrica

Demonstração. Temos, por hipótese, que $\langle I'(u_0), v \rangle = 0$ para todo $v \in \text{Fix}(G)$ e queremos mostrar que $\langle I'(u_0), v \rangle = 0$ para todo $v \in X$; equivalentemente, que $\nabla I(u_0) = 0$. Começemos observando que, como u_0 é ponto crítico de $I|_{\text{Fix}(G)}$, então $\nabla I(u_0) \in \text{Fix}(G)^\perp$, pois

$$\langle \nabla I(u_0), v \rangle_X = \langle I'(u_0), v \rangle = 0, \quad v \in \text{Fix}(G).$$

Como I é invariante pela ação de G sobre X , temos pelo item (d) da Definição 3.3 que

$$\begin{aligned} \langle \nabla I(gu), v \rangle_X &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(gu + tv) - I(gu)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(g^{-1}(gu + tv)) - I(g^{-1}gu)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + tg^{-1}v) - I(u)}{t} \\ &= \langle \nabla I(u), g^{-1}v \rangle_X \quad g \in G, u, v \in X. \end{aligned}$$

Por outro lado, a ação é isométrica. Segue da identidade

$$2 \langle x, y \rangle_X = \|x + y\|_X^2 - \|x\|_X^2 - \|y\|_X^2, \quad x, y \in X,$$

que

$$\begin{aligned} \langle \nabla I(gu), v \rangle_X &= \langle \nabla I(u), g^{-1}v \rangle_X \\ &= \langle g\nabla I(u), gg^{-1}v \rangle_X \\ &= \langle g\nabla I(u), v \rangle_X, \quad g \in G, u, v \in X, \end{aligned}$$

de modo que $\nabla I(gu) = g\nabla I(u)$, para todos $g \in G$ e $u \in X$. Em particular,

$$g\nabla I(u_0) = \nabla I(gu_0) = \nabla I(u_0), \quad g \in G,$$

pois $u_0 \in \text{Fix}(G)$. Portanto $\nabla I(u_0) \in \text{Fix}(G)$. Segue que

$$\nabla I(u_0) \in \text{Fix}(G) \cap \text{Fix}(G)^\perp = \{0\},$$

o que completa a demonstração. ■

Corolário. *Sejam $\varphi : X(\rho, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional do Capítulo 2 e $u_0 \in E(\rho, \sigma)$ um ponto crítico de $\varphi : E(\rho, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, sua restrição ao subespaço $E(\rho, \sigma)$. Então u_0 é um ponto crítico de $\varphi : X(\rho, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. Aplicamos o Teorema 3.3 com $G = O(N)$, $X = X(\rho, \sigma)$ e a ação de G sobre $X(\rho, \sigma)$ discutida no Exemplo 3.1. Como foi visto no exemplo, esta ação é isométrica, φ é invariante e $E(\rho, \sigma) = \text{Fix}(G)$. ■

3.4 Uma Solução não-radial

3.4 Uma Solução não-radial

Aplicamos, agora, o Teorema do Passo da Montanha e os conceitos algébricos introduzidos anteriormente para estabelecer a existência de uma solução não-radial para o problema (3.1). Como no Capítulo 2, o funcional $\varphi : X = X(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} b(|x|) u^2 - F(|x|, u) \right) dx, \quad u \in X,$$

é de classe C^1 e seus pontos críticos são soluções fracas do problema (3.1). Como o Lema B.2 permanece válido se (f_5) é substituída por (f'_5) , a demonstração do Lema 2.1 também funciona sem que se mude uma única palavra para verificar a geometria do passo da montanha para o funcional φ . Para estabelecer a existência de um ponto crítico não-trivial via Teorema do Passo da Montanha, resta verificar que Palais-Smale também está satisfeita.

Demonstração do Teorema 3.1. (I) Se $N = 4$ ou $N \geq 6$, então é possível encontrar $m \geq 2$ tal que $N - 2m = 0$ ou $N - 2m \geq 2$. Nesse caso, seja

$$G = O(m) \times O(m) \times O(N - 2m).$$

Se olharmos para \mathbb{R}^N como sendo o espaço $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{N-2m}$, podemos ver G como a classe das transformações lineares ortogonais pelas quais cada uma das três parcelas é um subespaço invariante. As matrizes representando elementos de G são matrizes onde a diagonal principal contém três blocos de tamanhos m , m e $N - 2m$, respectivamente, e o restante das entradas é 0. Pelo Corolário 1 do Teorema 3.2, as imersões

$$X \cap H_G(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*,$$

são compactas.

Agora consideremos a transformação $\tau \in O(N)$ dada por

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-2m},$$

e a ação de $H := \langle \tau \rangle$ sobre $X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$1 * u = u,$$

$$(\tau * u)(x) = -u(\tau^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad u \in X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N).$$

Como na Proposição 3.1 e no Exemplo 3.1, dada $u \in X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)$, temos que $\tau u \in X$. Além disso,

$$(g(\tau u))(x) = -u(g^{-1}\tau^{-1}x) = -u(\tau^{-1}x) = (\tau u)(x),$$

para cada $g \in G$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, pois $u \in H_G^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, de fato, $\tau u \in X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)$ e a ação está bem definida. A linearidade no

3.4 Uma Solução não-radial

subitem (ii) do item (a) da Definição 3.3 é imediata e, como no Exemplo 3.1, a ação é isométrica e, portanto, $u \mapsto g * u$, $u \in X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)$, é contínua para cada $g \in G$.

(II) Como $Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)$ é um subespaço fechado de $X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)$, as imersões

$$Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*,$$

também são compactas. Assim, podemos refazer a demonstração do Lema 2.2 substituindo E por $Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)$ e concluir que $\varphi|_{Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)}$, além de possuir a geometria do passo da montanha, também satisfaz Palais-Smale. Pelo Teorema do Passo da Montanha, segue que $\varphi|_{Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)}$ possui um ponto crítico não-trivial³ $u_0 \in Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)$. Ora, a única função radial em $Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)$ é a função identicamente nula. Com efeito, se $u \in Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)$ é radial, então

$$u(x) = -u(\tau^{-1}x) = -u(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Concluimos que u_0 é uma função não-radial.

(III) Notemos que $\varphi : X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante pela ação de H . Com efeito, como f é ímpar com respeito a u , temos que F é par com respeito a u , logo

$$\begin{aligned} 2\varphi(\tau u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla((\tau u)(x))|^2 + b(|x|)((\tau u)(x))^2 - 2F(|x|, (\tau u)(x)) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u(\tau^{-1}x)|^2 + b(|x|)(u(\tau^{-1}x))^2 - 2F(|x|, u(\tau^{-1}x)) \right) dx \\ &= 2\varphi(u), \quad u \in X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

pela isometria da ação e por uma mudança de variáveis. Segue pelo Princípio da Criticalidade Simétrica que u_0 é ponto crítico de $\varphi : X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$.

Uma vez que $X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N) = Fix(G)$ pela ação de G sobre X induzida pela ação considerada no Exemplo 3.1, concluimos analogamente que u_0 é ponto crítico de $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$.

(IV) Resumidamente, encontramos um ponto crítico não-radial u_0 de φ restrita a um subespaço apropriado de X e, via Princípio da Criticalidade Simétrica, mostramos que se trata de um ponto crítico de $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Em outros termos, u_0 é uma solução fraca não-radial para o problema (3.1). Pela Teoria de Regularidade desenvolvida na próxima seção, u_0 é uma solução clássica, o que completa a demonstração do Teorema 3.1. ■

³Tomando $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N-2m}) \cap H_{rad}^1(\mathbb{R}^m)$ e $\psi_3 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \cap H_{rad}^1(\mathbb{R}^{N-2m})$ não-negativas, temos que $\psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-2m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(x_1, x_2, x_3) = \log \frac{1+\psi_3(x_1)\psi_1(x_3)}{1+\psi_3(x_2)\psi_2(x_3)}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-2m}$, está em $Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G)$. Em particular, $Fix_{X \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)}(G) \neq \{0\}$.

3.5 Regularidade

3.5 Regularidade

As provas dos Lemas 2.16–2.18 continuam válidas com a hipótese (f_5) substituída por (f'_5) . Assim, sabemos que $u_0 \in C^1(B(0, R))$ para cada $R > 0$. Em particular, para cada $R > 0$, existe uma constante $K_R > 0$ tal que $|\nabla u_0(x)| \leq K_R$, $x \in B(0, R)$.

Agora, temos que

$$\begin{aligned} |f(|x|, u_0(x)) - f(|y|, u_0(y))| &\leq K |u_0(x) - u_0(y)|^\theta \\ &\leq K K_R^\theta |x - y|^\theta, \quad x, y \in B(0, R), \end{aligned}$$

pela hipótese de que f é Hölder-contínua de expoente $\theta \in (0, 1)$ com respeito a u e pela Desigualdade do Valor Médio. Isto quer dizer que $f(|\cdot|, u_0(\cdot)) \in C^{0, \theta}(B(0, R))$. Segue pelo Teorema 2.3 que $u_0 \in C^{2, \theta}(B(0, R))$. Isto prova que u_0 é duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R}^N .



Apêndice A

Resultados de Análise Funcional

Neste apêndice incluímos para referência rápida diversos fatos de Análise Funcional e Espaços de Sobolev usados nos capítulos anteriores. Devido à vasta, detalhada e acessível literatura nos tópicos, omitimos a maioria das demonstrações e enunciamos os teoremas de imersão de Sobolev e Rellich-Kondrachov apenas para os casos particulares de que precisamos, remetendo o leitor interessado em um estudo mais aprofundado a referências apropriadas.

A.1 Funções semicontínuas inferiormente

Dados um espaço topológico X , uma função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, definimos o \liminf de $\psi(x)$ quando x tende a x_0 por

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \psi(x) := \sup\{\inf \psi(A); A \subseteq X \text{ é aberto contendo } x_0\}.$$

Definição A.1. *Dados um espaço topológico X e uma função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que ψ é semicontínua inferiormente se*

$$\psi(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \psi(x), \quad x_0 \in X.$$

Proposição A.1. *Se $\psi_1, \psi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ são semicontínuas inferiormente, então $\psi_1 + \psi_2$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Pelas definições acima, para cada $x_0 \in X$, existe uma seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abertos em X contendo x_0 tal que

$$\psi_1(x_0) - \frac{1}{2n} < \inf \psi_1(A_n) \quad \text{e} \quad \psi_2(x_0) - \frac{1}{2n} < \inf \psi_2(A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A.1 Funções semicontínuas inferiormente

Segue que

$$\begin{aligned} \psi_1(x_0) + \psi_2(x_0) - \frac{1}{n} &< \inf \psi_1(A_n) + \inf \psi_2(A_n) \\ &\leq \inf(\psi_1 + \psi_2)(A_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0) \leq \inf_{x \rightarrow x_0} (\psi_1 + \psi_2)(x),$$

o que prova o lema. ■

Proposição A.2. *Se $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente e X é compacto, então existe $x_0 \in X$ tal que*

$$\psi(x_0) = \inf_{x \in X} \psi(x).$$

Em outros termos, ψ é limitada inferiormente e seu ínfimo é atingido.

Demonstração. Conferir [11, pág. 5, Teorema 1.3] ou [9, § 3].¹ ■

O leitor que for procurar por uma das duas referências precisará de uma outra definição—equivalente à Definição A.1—de semicontinuidade inferior.

Definição A.2. *Dados um espaço topológico X e uma função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que ψ é semicontínua inferiormente se $\psi^{-1}((a, \infty))$ é um aberto em X para cada $a \in \mathbb{R}$.*

Proposição A.3. *As Definições A.1 e A.2 são equivalentes.*

Demonstração. Suponhamos que

$$\psi(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \psi(x), \quad x_0 \in X,$$

e seja $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Dado arbitrariamente $x_0 \in \psi^{-1}((a, \infty))$, como na demonstração da Proposição A.1, existe um aberto $A \subseteq X$ tal que

$$\psi(x_0) - (\psi(x_0) - a) = a < \inf \psi(A),$$

de modo que $A \subseteq \psi^{-1}((a, \infty))$. Isto mostra que $\psi^{-1}((a, \infty))$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $\psi^{-1}((a, \infty))$ seja aberto para cada $a \in \mathbb{R}$. Dado arbitrariamente $x_0 \in X$, temos que $A_n = \psi^{-1}((\psi(x_0) - 1/n, \infty))$ é um aberto contendo x_0 e

$$\inf \psi(A_n) \geq \psi(x_0) - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sup\{\inf \psi(A); A \subseteq X \text{ é aberto contendo } x_0\} &\geq \sup\{\inf \psi(A_n); n \in \mathbb{N}\} \\ &\geq \psi(x_0). \end{aligned}$$

Isto completa a prova da equivalência entre as duas definições. ■

¹Estas referências também são ótimas introduções à aplicação de métodos variacionais ao estudo de equações diferenciais.

A.2 De convergência fraca para forte

A.2 De convergência fraca para forte

Frequentemente, como aconteceu na demonstração do item (d) do Lema 2.1 e na demonstração do item (d) da Proposição 2.3, nos deparamos com uma situação na qual temos dois espaços de Banach E e F , uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E convergente fracamente para um certo $u \in E$ e uma imersão compacta $E \hookrightarrow F$, e queremos mostrar que existe uma subsequência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente fortemente (em F) para u . A imersão compacta garante que, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que u_n converge fortemente para algum $\tilde{u} \in F$. Mas não é imediato que $\tilde{u} = u$. Uma justificativa explícita dessa igualdade, embora não seja muito difícil de obter, não é encontrada em nenhuma das referências consultadas. Dada a importância do resultado, acreditamos que vale a pena dedicá-lo um pouco de espaço neste trabalho.

Como em [7, Capítulo III], dado um espaço de Banach E , denotamos por $\sigma(E, E')$ a topologia fraca de E .

Lema A.1. *Sejam E e F dois espaços de Banach. Se $T : E \rightarrow F$ é uma transformação linear contínua de $(E, \|\cdot\|_E)$ em $(F, \|\cdot\|_F)$, então T é contínua de $(E, \sigma(E, E'))$ em $(F, \sigma(F, F'))$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que a aplicação $T_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_f x = \langle f, Tx \rangle$, $x \in E$, é contínua de $(E, \sigma(E, E'))$ em \mathbb{R} para cada $f \in F'$.² Como

$$|T_f x| \leq \|f\|_{F'} \cdot \|Tx\|_E \leq \|f\|_{F'} \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \cdot \|x\|_E, \quad x \in E,$$

concluimos que T_f é contínua de E em \mathbb{R} . Segue que T_f é contínua de $(E, \sigma(E, E'))$ em \mathbb{R} , como queríamos. ■

Teorema A.1. *Sejam E e F espaços de Banach, suponhamos que E esteja imerso continuamente em F e seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E e $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{u}$ em F . Então $\tilde{u} = u$.*

Demonstração. Trata-se de um corolário do Lema A.1. Como convergência forte implica convergência fraca, temos que $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em F . Mas como a imersão é contínua, temos que $u_n \rightharpoonup u$ também em F . Lembrando que a topologia fraca é uma topologia de Hausdorff (conferir [7, Proposição III.3]), ocorre a unicidade do limite e, portanto, $\tilde{u} = u$. ■

Observações. (1) A título de curiosidade, mencionamos que a recíproca do Lema A.1 também é verdadeira (conferir [7, Teorema III.9]). (2) Preferimos enunciar o Teorema A.1 exatamente como precisamos dele ao longo do texto mas fica claro em sua demonstração que a hipótese de que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{u}$ pode ser substituída por $u_n \rightharpoonup \tilde{u}$ sem que sua conclusão se altere.

²Conferir [7, § III.1] para propriedades gerais da topologia menos fina que faz contínuas todas as aplicações em uma família de aplicações.

A.3 Imersões e extensões

A.3 Imersões e extensões

O seguinte caso particular do Teorema da Imersão de Sobolev também foi usado no Capítulo 2. Uma discussão deste teorema bastante geral e com muitos detalhes pode ser encontrada em Adams [1, Chapter V].

Teorema A.2 (Teorema da Imersão de Sobolev). *Sejam $N \geq 2$ um inteiro e $\Omega = \Omega(\rho, \sigma) \subseteq \mathbb{R}^N$ como no Capítulo 2. Então $H^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para cada $p \in [2, 2^*]$, se $N \geq 3$, e para cada $p \in [2, 2^*)$, se $N = 2$, onde*

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{se } N \geq 3 \\ \infty, & \text{se } N = 2 \end{cases}.$$

Demonstração. Conferir [1, 5.4 Theorem, Part I, Case A]. Note que Ω tem a regularidade exigida nesta referência, ou seja, satisfaz a propriedade do cone.³ ■

O Teorema de Rellich-Kondrachov estabelece condições sob as quais algumas das imersões no Teorema da Imersão de Sobolev são compactas. Novamente, uma discussão mais aprofundada do resultado pode ser encontrada em [1, Chapter VI].

Teorema A.3 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Sejam $N \geq 2$ um inteiro e $\Omega = \Omega(\rho, \sigma) \subseteq \mathbb{R}^N$ como no Capítulo 2 limitado. Então $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^p(\Omega)$ para cada $p \in [1, 2^*)$ onde 2^* é definido como no Teorema A.2.*

Demonstração. Conferir [1, 6.2 Theorem, Part I]. ■

Muitas vezes ao longo do trabalho foi conveniente ou mesmo necessário estender funções de $H_0^1(\Omega)$ a domínios maiores por meio da concatenação de funções em H_0^1 de domínios que não se intersectam, dois a dois, em conjuntos de medida positiva. O teorema abaixo justifica a validade destas extensões.

Teorema A.4. *Sejam Ω_1, Ω_2 abertos em \mathbb{R}^N tais que a medida de Lebesgue de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é nula, $u_1 \in H_0^1(\Omega_1)$, $u_2 \in H_0^1(\Omega_2)$ e*

$$u : \Omega_1 \cup \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} u_1(x), & \text{se } x \in \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_2(x), & \text{se } x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Então $u \in H_0^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

³Uma definição precisa do que significa satisfazer a propriedade do cone e uma discussão mais profunda acerca de regularidade de domínios também pode ser encontrada em Adams [1, ¶¶ 4.1–4.9, 5.3].

A.4 As Derivadas de Gâteaux e Fréchet

Demonstração. De fato, sejam $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^1(\Omega_1)$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_c^1(\Omega_2)$ convergentes a u_1 e u_2 , respectivamente, no sentido de H^1 . Então $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde

$$z_n : \Omega_1 \cup \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} v_n(x), & \text{se } x \in \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ w_n(x), & \text{se } x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ convergente a, digamos, $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Para ver que $\tilde{u} = u$, basta considerar a imersão de H^1 em L^2 . Passando a subsequências, se necessário, temos que

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = u(x)$$

para quase todo $x \in \Omega_1$,

$$\tilde{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = u(x)$$

para quase todo $x \in \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2$ tem medida nula por hipótese. Logo $\tilde{u}(x) = u(x)$ para quase todo $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. ■

A.4 As Derivadas de Gâteaux e Fréchet

Uma etapa importante no método que usamos para encontrar soluções para o problema estudado no Capítulo 2 é a prova de que o funcional φ é de classe C^1 , feita na Seção B.4.

Definição A.3. *Sejam E, F dois espaços de Banach, $U \subseteq E$ um aberto e $I : U \rightarrow F$. Dizemos que I é diferenciável a Gâteaux em $a \in U$ se o limite*

$$(\nabla I(a))(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(a + tv) - I(a)}{t}$$

existe para cada $v \in E$. Neste caso, a aplicação $v \mapsto (\nabla I(a))(v)$, $v \in E$, é chamada de derivada de Gâteaux de I em a . Dizemos que I é diferenciável a Gâteaux em U se I é diferenciável a Gâteaux em cada $a \in U$. Neste caso, a aplicação $\nabla I : U \rightarrow \mathcal{M}(U, F)$, onde $\mathcal{M}(U, F)$ é o conjunto de todas as aplicações de U em F , que a cada $a \in U$ associa a derivada de Gâteaux $\nabla I(a)$ de I em a , é chamada de derivada de Gâteaux de I .

Definição A.4. *Sejam E, F dois espaços de Banach, $U \subseteq E$ um aberto e $I : U \rightarrow F$. Dizemos que I é diferenciável a Fréchet ou, simplesmente, diferenciável em $a \in U$ se existe $I'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|I(a + v) - I(a) - \langle I'(a), v \rangle\|_F}{\|v\|_E} = 0$$

A.4 As Derivadas de Gâteaux e Fréchet

para cada $v \in E$. Neste caso, $I'(a)$ é chamada de derivada de Fréchet ou, simplesmente, derivada de I no ponto a . Dizemos que I é diferenciável em U se é diferenciável em cada ponto $a \in U$. Neste caso, a aplicação $I' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ que a cada $a \in U$ associa a derivada de I no ponto a , é chamada de derivada de I . Dizemos que I é de classe C^1 se I' é contínua.

A literatura está repleta de exemplos que mostram que ambas derivadas não são equivalentes, mesmo em dimensão finita (conferir, por exemplo, [15, Seção III.3, págs. 129–130]). No entanto, elas estão relacionadas e vamos dar, na Proposição A.4, condições suficientes para que uma aplicação diferenciável a Gâteaux seja de classe C^1 . Esse resultado nos é útil na prova de que o funcional φ do Capítulo 2 é de classe C^1 .

Dados dois espaços de Banach E, F e um aberto $U \subseteq E$, consideramos três hipóteses envolvendo uma aplicação $I : U \rightarrow F$. Qualquer das hipóteses sempre assume as anteriores como satisfeitas.

(I) I é diferenciável a Gâteaux em U .

(II) $v \mapsto (\nabla I(a))(v)$, $v \in E$, é linear e limitada para cada $a \in U$.

(III) $\nabla I : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ é contínua.

Proposição A.4. *Sejam E, F espaços de Banach, $U \subseteq E$ um aberto e $I : U \rightarrow F$. Se I satisfaz (I), (II) e (III), então I é de classe C^1 , ou seja, é diferenciável a Fréchet e sua derivada é contínua. Além disso, $I'(a) = \nabla I(a)$ para cada $a \in U$.*

Para demonstrar a Proposição A.4, usamos uma generalização da Desigualdade do Valor Médio.

Proposição A.5. *Sejam E, F espaços de Banach, $U \subseteq E$ um aberto e $I : U \rightarrow F$. Dados $a, b \in U$, se o segmento $[a, b]$ ligando a a b está inteiramente contido em U e existe $M \geq 0$ tal que $\|\nabla I(u)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq M$ para todo $u \in [a, b]$, então*

$$\|I(b) - I(a)\|_F \leq M \|b - a\|_E .$$

Demonstração. 1. Consideremos a aplicação $g : [0, 1] \rightarrow F$ definida por $g(t) = I(a + tv)$, $t \in [0, 1]$, onde $v := b - a$. Mostremos que g é contínua. Com efeito, fixado arbitrariamente $t_0 \in [0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(t_0)\|_F &\leq |t - t_0| \left\| \frac{I(a + tv) - I(a + t_0v)}{t - t_0} - (\nabla I(a + t_0v))(v) \right\|_F \\ &\quad + |t - t_0| \|(\nabla I(a + t_0v))(v)\|_F \\ &\xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0, \end{aligned}$$

pois I é diferenciável a Gâteaux em $a + t_0v$ por hipótese.

A.4 As Derivadas de Gâteaux e Fréchet

Observe ainda que, dos cálculos acima, é possível concluir que g é diferenciável em $(0, 1)$ e

$$g'(t) = (\nabla I(a + tv))(v), \quad t \in (0, 1). \quad (\text{A.1})$$

2. Em virtude da continuidade de g , para provar a proposição, basta mostrarmos que

$$\|g(t) - g(0)\|_F \leq t(M \|v\|_E + \epsilon) + \epsilon, \quad (\text{A.2})$$

quaisquer que sejam $\epsilon > 0$ e $t \in [0, 1]$; o resultado segue da passagem dos limites quando $t \rightarrow 1$ e $\epsilon \rightarrow 0$ nesta desigualdade.

Fixemos arbitrariamente $\epsilon > 0$ e seja \mathcal{V} o conjunto dos valores $t \in [0, 1]$ tais que

$$\|g(t) - g(0)\|_F > t(M \|v\|_E + \epsilon) + \epsilon.$$

Suponhamos, por contradição, que $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Pela continuidade de g , o conjunto \mathcal{V} é aberto em $[0, 1]$. Em particular, se denotamos seu ínfimo por t_1 , então $t_1 \notin \mathcal{V}$. Como a desigualdade em (A.2) é estrita em $t = 0$, segue da continuidade de g que $t_1 > 0$. Também sabemos que $t_1 < 1$ pois, do contrário, teríamos $\mathcal{V} = \{1\}$, que não é aberto em $[0, 1]$.

Por (A.1), existe $\eta > 0$ tal que $[t_1, t_1 + \eta] \subseteq [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(t_1)\|_F &\leq (t - t_1)(\|(\nabla I(a + t_1v))(v)\|_F + \epsilon) \\ &\leq (t - t_1)(M \|v\|_E + \epsilon) \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_1, t_1 + \eta]$. Lembrando que $t_1 \notin \mathcal{V}$ e combinando esta desigualdade com (A.2), obtemos

$$\|g(t) - g(0)\| \leq t(M \|v\|_E + \epsilon) + \epsilon, \quad t \in [t_1, t_1 + \eta].$$

Mas isso é um absurdo, pois t_1 foi definido como o ínfimo de \mathcal{V} . Portanto \mathcal{V} é vazio, o que completa a demonstração. ■

Demonstração da Proposição A.4. Basta mostrarmos que I é diferenciável a Fréchet e que $I' = \nabla I$ pois, neste caso, I' é contínua em virtude de (III).

Fixado arbitrariamente $a \in U$, sejam $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq U$ e

$$\begin{aligned} \tilde{I} : B(0, r) &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto I(a + v) - I(a) - (\nabla I(a))(v) \end{aligned} .$$

Por (I) e (II), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{I}(v + tw) - \tilde{I}(v)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(a + v + tw) - I(a + v)}{t} \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\nabla I(a))(tw + v) - (\nabla I(a))(v)}{t} \\ &= (\nabla I(a + v) - \nabla I(a))(w), \quad v \in B(0, r), w \in E. \end{aligned}$$

A.4 As Derivadas de Gâteaux e Fréchet

Portanto \tilde{I} é diferenciável a Gâteaux em $B(0, r)$ e $\nabla\tilde{I}(v) = \nabla I(a+v) - \nabla I(a)$, $v \in B(0, r)$. Além disso, $\nabla\tilde{I}(v)$ é linear para cada $v \in B(0, r)$ por (II).

Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta \in (0, r)$ tal que

$$\|\nabla I(a+v) - \nabla I(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \epsilon, \quad \|v\|_E < \delta,$$

pois ∇I é contínua pela hipótese (III). Assim, se $\|v\|_E < \delta$, então

$$\begin{aligned} \|I(a+v) - I(a) - (\nabla I(a))(v)\|_F &= \left\| \tilde{I}(v) - \tilde{I}(0) \right\|_F \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \left\| \nabla \tilde{I}(tv) \right\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v - 0\|_E \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla I(a+tv) - \nabla I(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v\|_E \\ &\leq \epsilon \|v\|_E \end{aligned}$$

pela Proposição A.5. Isto mostra que I é Fréchet diferenciável em a e que $I'(a) = \nabla I(a)$. ■

Apêndice B

Resultados de Métodos Variacionais

Neste apêndice, apresentamos alguns detalhes técnicos omitidos nos Capítulos 2 e 3. Aonde não é feita menção em contrário, as notações e hipóteses são as mesmas utilizadas nestes capítulos. Aqui, ψ denota uma função contínua típica de $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R} e Ψ sua primitiva usual com respeito à segunda variável:

$$\begin{aligned}\Psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, u) &\longmapsto \int_0^u \psi(r, v) \, dv.\end{aligned}$$

As hipóteses (f_1) – (f_5) estão listadas no princípio do Capítulo 2, a partir da página 26. A hipótese (f'_5) , que substitui a hipótese (f_5) na busca por soluções não-radiais, é apresentada no início do Capítulo 3, página 65.

Na Seção B.2, necessitamos apenas de uma versão um pouco mais fraca da hipótese (f_2) :

(f'_2) Existem constantes reais $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$\mu\Psi(r, u) \leq u\psi(r, u), \quad r \geq 0, \quad u \geq R.$$

Se não fosse pela limitação do nosso argumento para provar o item (c) do Lema 2.1 no caso em que $\sigma = \infty$, (f'_2) poderia substituir (f_2) em todo o trabalho.

B.1 A função g satisfaz as hipóteses (f_1) – (f_5)

Na busca por soluções radiais desenvolvida no Capítulo 2, modificamos o problema (2.2) substituindo f por uma função apropriada $g = g^\pm$ e afirmamos que esta também satisfazia (f_1) – (f_5) . Apresentamos em detalhes os

B.1 A função g satisfaz as hipóteses (f_1) – (f_5)

argumentos para $g = g^+$. O caso $g = g^-$ é tratado de forma inteiramente análoga.

Como $g(r, u) = f(r, u)$ sempre que $r \geq 0$ e $u \geq 0$, basta nos preocuparmos com a região em que $u \leq 0$.

Verificação de (f_1) . Se $|u| \geq R_1$ e $u \leq 0$, então

$$|g(r, u)| = |-f(r, -u)| \leq a_1 |u|^s, \quad r \geq 0.$$

Portanto, para as mesmas constantes $a_1, R_1, s > 0$, temos

$$|g(r, u)| \leq a_1 |u|^s, \quad r \geq 0, \quad |u| \geq R_1,$$

como afirmado. ■

Verificação de (f_2) . Temos, pela mudança de variáveis $w = -v$, que

$$\begin{aligned} G(r, u) &= \int_u^0 f(r, -v) dv \\ &= - \int_{-u}^0 f(r, w) dw \\ &= F(r, -u), \quad r \geq 0, \quad u \leq 0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Portanto

$$\mu G(r, u) = \mu F(r, -u) \leq (-u) f(r, -u) = u \cdot g(r, u), \quad r \geq 0.$$

Concluimos que g satisfaz (f_2) . ■

Observe que exatamente o mesmo argumento serviria para mostrar que, se f satisfizesse (f'_2) , então g também iria satisfazer (f'_2) .

Verificação de (f_3) . De fato, por (B.1),

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{\substack{r > 0 \\ |u| \geq K}} G(r, u) = \lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{\substack{r > 0 \\ u \geq K}} F(r, u) \geq \lim_{K \rightarrow \infty} \inf_{\substack{r > 0 \\ |u| \geq K}} F(r, u) > 0,$$

como afirmado. ■

Verificação de (f_4) . Com efeito,

$$\frac{|g(r, u)|}{|u|} = \frac{|f(r, |u|)|}{|u|} \rightarrow 0$$

quando $u \rightarrow 0$ uniformemente em r . ■

Antes de mostrar que g satisfaz (f_5) derivamos uma consequência providencial das hipóteses (f_4) e (f_5) , que também será usada na Seção B.2:

B.1 A função g satisfaz as hipóteses (f_1) – (f_5)

Lema B.1. *Se $\psi \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz (f_4) e (f_5) , então, para cada $r \geq 0$, a função $u \mapsto \psi(r, u)$, $u \in \mathbb{R}$, é crescente e satisfaz*

$$\psi(r, u_1^-) < 0 = \psi(r, 0) < \psi(r, u_1^+), \quad u_1^- < 0 < u_1^+. \quad (\text{B.2})$$

Demonstração. Fixemos arbitrariamente $r \geq 0$. Por (f_4) ,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(r, u)}{|u|} = 0 \quad (\text{B.3})$$

e, daí,

$$\psi(r, 0) = \lim_{u \rightarrow 0} \psi(r, u) = \lim_{u \rightarrow 0} |u| \frac{\psi(r, u)}{|u|} = 0 \quad (\text{B.4})$$

pela continuidade de ψ . Por (B.3) e (f_5) ,

$$\frac{\psi(r, u_2^-)}{|u_2^-|} < \frac{\psi(r, u_1^-)}{|u_1^-|} < 0 < \frac{\psi(r, u_1^+)}{|u_1^+|} < \frac{\psi(r, u_2^+)}{|u_2^+|} \quad (\text{B.5})$$

sempre que $u_2^- < u_1^- < 0 < u_1^+ < u_2^+$. Multiplicando os dois últimos membros de (B.5) por $|u_1^+|$ obtemos

$$\psi(r, u_1^+) < \psi(r, u_2^+) \frac{|u_1^+|}{|u_2^+|} < \psi(r, u_2^+), \quad 0 < u_1^+ < u_2^+,$$

e, analogamente, mostramos que $\psi(r, u_2^-) \leq \psi(r, u_1^-)$ para $u_2^- < u_1^- < 0$. Para completar a demonstração, (B.2) segue de (B.4) e das segunda e terceira desigualdades de (B.5). ■

Corolário. *Se $\psi \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz (f_4) e (f_5) , então Ψ é não-negativa.*

Demonstração. De fato, neste caso,

$$\int_0^u \psi(r, v) dv \geq \int_0^u 0 dv = 0, \quad u \geq 0,$$

e

$$\int_0^u \psi(r, v) dv = - \int_u^0 \psi(r, v) dv \geq 0, \quad u \leq 0,$$

qualquer que seja $r \geq 0$. ■

Verificação de (f_5) . Dados $r \geq 0$ e $u_1, u_2 < 0$ com $u_1 < u_2$ quaisquer, vale

$$\frac{g(r, u_1)}{|u_1|} = \frac{-f(r, -u_1)}{|u_1|} < \frac{-f(r, -u_2)}{|u_2|} = \frac{g(r, u_2)}{|u_2|}.$$

De modo parecido, se $u_1 < 0 < u_2$, então

$$\frac{g(r, u_1)}{|u_1|} = \frac{-f(r, -u_1)}{|u_1|} < 0 < \frac{f(r, u_2)}{|u_2|} = \frac{g(r, u_2)}{|u_2|}$$

pelo Lema B.1. ■

B.2 Estimativas de crescimento

Observação. Mostramos de modo análogo que a função g^- , definida na Subseção 2.1.4 (página 40) e usada para obter uma solução negativa para o problema (2.2) (página 27), também satisfaz as hipóteses (f_1) – (f_5) .

B.2 Estimativas de crescimento

Lema B.2. *Suponha que $\psi \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz (f_1) , (f_4) e (f_5) . Então, para cada $\epsilon > 0$, existe um $A = A(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|\psi(r, u)| \leq 2\epsilon |u| + (s+1)A |u|^s$$

e

$$|\Psi(r, u)| \leq \epsilon |u|^2 + A |u|^{s+1}, \quad r \geq 0, u \in \mathbb{R}.$$

Se estão satisfeitas (f_1) , (f_4) e (f'_5) , então a mesma conclusão é válida.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ qualquer, (f_4) nos garante que existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|u| \leq \delta \Rightarrow |\psi(r, u)| \leq 2\epsilon |u|, \quad r \geq 0. \quad (\text{B.6})$$

Por outro lado, (f_1) nos dá

$$|\psi(r, u)| \leq a_1 |u|^s, \quad r \geq 0, |u| \geq R_1. \quad (\text{B.7})$$

E, pelo Lema B.1—ou por (f'_5) , caso (f_5) não seja válida—e (B.7) aplicada a $|u| = R_1$, concluímos que

$$|\psi(r, u)| \leq \max\{|\psi(r, -R_1)|, |\psi(r, R_1)|\} \leq a_1 R_1^s, \quad r \geq 0, |u| \leq R_1. \quad (\text{B.8})$$

Combinando (B.6)–(B.8) obtemos

$$|\psi(r, u)| \leq 2\epsilon |u| + a_1 R_1^s + a_1 |u|^s, \quad r \geq 0, u \in \mathbb{R}.$$

Tomando

$$A = A(\epsilon) = \frac{1}{s+1} \left(a_1 + \frac{a_1 R_1^s}{\delta^s} \right) > 0$$

e observando que, por (B.6), $2\epsilon |u|$ já é uma cota superior para $|\psi(r, u)|$ quando $|u| \leq \delta$, temos

$$|\psi(r, u)| \leq 2\epsilon |u| + \frac{a_1 R_1^s}{\delta^s} |u|^s + a_1 |u|^s = 2\epsilon |u| + (s+1)A |u|^s.$$

Isso nos dá a primeira desigualdade na conclusão do lema. Integrando obtemos

$$\begin{aligned} |\Psi(r, u)| &= \left| \int_0^u \psi(r, v) dv \right| \\ &\leq \int_0^{|u|} (2\epsilon v + (s+1)A v^s) dv \\ &= \epsilon |u|^2 + A |u|^{s+1}, \quad r \geq 0, u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que dá a segunda desigualdade e completa a prova. ■

B.2 Estimativas de crescimento

A hipótese (f_5) é desnecessária se queremos apenas encontrar $A = A(\epsilon) > 0$ tal que

$$|\Psi(r, u)| \leq \epsilon |u|^2 + A |u|^{s+1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad u \in \mathbb{R},$$

para certos $r_1, r_2 \in [0, \infty)$, $r_1 \leq r_2$, dados:

Corolário. *Sejam r_1, r_2 números reais quaisquer com $0 \leq r_1 \leq r_2 < \infty$ e suponha que $\psi \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz (f_1) e (f_4) . Então, para cada $\epsilon > 0$, existe um $A = A(\epsilon) > 0$ tal que*

$$|\Psi(r, u)| \leq \epsilon |u|^2 + A |u|^{s+1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Com efeito, como ψ é contínua no compacto $[r_1, r_2] \times [0, R_1]$, podemos aplicar o mesmo argumento da demonstração do Lema B.2 com a estimativa

$$|\psi(r, u)| \leq \max_{\substack{r_1 \leq r \leq r_2 \\ |u| \leq R_1}} |\psi(r, u)| < \infty, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad |u| \leq R_1,$$

no lugar de (B.8). ■

Lema B.3. *Suponha que $\psi \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e satisfaz $(f'_2), (f_3)-(f_5)$. Então existem $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$\Psi(r, u) \geq C_1 |u|^\mu - C_2 |u|^2, \quad r \geq 0, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Por (f_3) , existe $K_0 > 0$ tal que

$$\Psi(r, u) \geq m := \inf_{\substack{r > 0 \\ |u| \geq K_0}} \Psi(r, u) > 0, \quad r \geq 0, \quad |u| \geq K_0.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $K_0 \geq R$ e concluir por (f'_2) que

$$\frac{\psi(r, u)}{\Psi(r, u)} \geq \frac{\mu}{u}, \quad r \geq 0, \quad u \geq K_0, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\psi(r, u)}{\Psi(r, u)} \leq \frac{\mu}{u}, \quad r \geq 0, \quad u \leq -K_0. \quad (\text{B.10})$$

Integrando-se ambos membros da desigualdade (B.9) de K_0 até u e ambos membros da desigualdade (B.10) de u até $-K_0$ obtemos, respectivamente,

$$\log \frac{\Psi(r, u)}{\Psi(r, K_0)} \geq \log \frac{|u|^\mu}{K_0^\mu}, \quad r \geq 0, \quad u \geq K_0,$$

$$\log \frac{\Psi(r, -K_0)}{\Psi(r, u)} \leq \log \frac{|-K_0|^\mu}{|u|^\mu}, \quad r \geq 0, \quad u \leq -K_0.$$

B.3 X com a norma $\|\cdot\|$ constitui um espaço de Hilbert

Combinando-se estas duas desigualdades com a monotonicidade do logaritmo vem

$$\begin{aligned}\Psi(r, u) &\geq \min \{ |\Psi(r, -K_0)|, |\Psi(r, K_0)| \} \frac{|u|^\mu}{K_0^\mu} \\ &\geq \frac{m}{K_0^\mu} |u|^\mu, \quad r \geq 0, |u| \geq K_0.\end{aligned}\tag{B.11}$$

Escrevamos $C_1 = m/K_0^\mu > 0$ e tomemos $C_2 = C_1 K_0^{\mu-2} > 0$. Então

$$C_1 |u|^\mu = C_1 |u|^{\mu-2} |u|^2 \leq C_2 |u|^2, \quad |u| \leq K_0.$$

Pelo Corolário do Lema B.1, Ψ é não-negativa, logo

$$\Psi(r, u) \geq 0 \geq C_1 |u|^\mu - C_2 |u|^2, \quad r \geq 0, |u| \leq K_0.$$

Combinando com (B.11) obtemos o resultado desejado. ■

B.3 X com a norma $\|\cdot\|$ constitui um espaço de Hilbert

Primeiramente mostramos que $X = X(\rho, \sigma)$ é, de fato, um subespaço de $H_0^1(\Omega(\rho, \sigma))$. A chave para a nossa demonstração é uma generalização da desigualdade de Schwarz cuja prova é uma mera releitura da prova desta desigualdade encontrada em [21, 3.5 Theorem, págs. 63–64].

Lema B.4. *Se $u, v \in X$, então*

$$\int_{\Omega} (|\nabla u \cdot \nabla v| + b(|x|) |u| \cdot |v|) dx \leq \|u\| \cdot \|v\| < \infty.$$

Demonstração. Se $\|u\| = 0$ ($\|v\| = 0$), então $u = 0$ ($v = 0$), logo a integral no membro esquerdo é nula e vale a desigualdade. Como $\|u\| < \infty$ e $\|v\| < \infty$, podemos, então, nos concentrar no caso em que $0 < \|u\|, \|v\| < \infty$.

Sejam

$$U = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{e} \quad V = \frac{v}{\|v\|}.\tag{B.12}$$

Temos que

$$\int_{\Omega} (|\nabla U|^2 + b(|x|)U^2) dx = \int_{\Omega} (|\nabla V|^2 + b(|x|)V^2) dx = 1.$$

Por outro lado

$$|\nabla U| |\nabla V| \leq \frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} |\nabla V|^2 \quad \text{e} \quad |U| |V| \leq \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{2} V^2 \quad \text{em } \Omega.$$

B.3 X com a norma $\|\cdot\|$ constitui um espaço de Hilbert

Multiplicando ambos membros da segunda desigualdade por $b(|x|)$, somando ambas e integrando o resultado sobre Ω obtemos, assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla U \cdot \nabla V| + b(|x|) |U| \cdot |V|) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla U|^2 + b(|x|)U^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla V|^2 + b(|x|)V^2) dx \\ & = 1. \end{aligned}$$

A desigualdade no enunciado é obtida substituindo-se (B.12) nesta última desigualdade. ■

Lema B.5. X é um espaço vetorial no qual $\|\cdot\|$ é uma norma.

Demonstração. (I) É imediato que $0 \in X$. E como $b(|x|) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in \Omega$, também fica claro que $\|u\| = 0$ se, e somente se $u = 0$.

(II) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in X$, a linearidade da integral nos dá

$$\int_{\Omega} (|\nabla(\alpha u)|^2 + b(|x|)(\alpha u)^2) dx = |\alpha|^2 \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2) dx < \infty.$$

Portanto $\alpha u \in X$ e $\|\alpha u\| \leq |\alpha| \|u\|$.

(III) Dados $u, v \in X$ quaisquer, pelo Lema B.4, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla(u+v)|^2 + b(|x|)(u+v)^2) dx \\ & = \|u\|^2 + 2 \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b(|x|)uv) dx + \|v\|^2 \\ & \leq \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $u+v \in X$ e $(\|u+v\|)^2 \leq (\|u\|+\|v\|)^2$, ou seja, $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$. Isto completa a prova de que X é um espaço vetorial no qual $\|\cdot\|$ é uma norma. ■

Para provar que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Hilbert, resta provar que X é completo na métrica induzida por essa norma e que ela vem de um produto interno.

Lema B.6. X com a norma $\|\cdot\|$ constitui um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy qualquer no espaço $(X, \|\cdot\|)$. Então $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $H_{0,rad}^1(\Omega)$ e a sequência $(b^{1/2}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Com efeito,

$$\|u_m - u_n\|_{H^1} \leq \left(\frac{1+a_0}{a_0} \right)^{1/2} \|u_m - u_n\|$$

B.4 Regularidade do funcional φ

e

$$\left\| b^{1/2}u_m - b^{1/2}u_n \right\|_{L^2} \leq \|u_m - u_n\|, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Como $H_{0,rad}^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ são completos, existem $u \in H_{0,rad}^1(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$ tais que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $H_{0,rad}^1(\Omega)$ e $b^{1/2}u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ em $L^2(\Omega)$. Devido à imersão $H_{0,rad}^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ e $(b(|x|))^{1/2}u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v(x)$ para quase todo $x \in \Omega$; em particular, $v(x) = (b(|x|))^{1/2}u(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, pois $b(|x|) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Segue que

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + b(|x|)u^2) dx \leq \|u\|_{H^1}^2 + \left\| b^{1/2}u \right\|_{L^2}^2 < \infty,$$

o que significa que $u \in H_{0,rad}^1(\Omega)$.

Agora mostremos que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $(X, \|\cdot\|)$. Para toda subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $(b(|x|))^{1/2}u_{n_k}(x) \leq h(x)$ para quase todo $x \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\|u_{n_k} - u\| \leq \|u_{n_k} - u\|_{H^1} + \int_{\Omega} b(|x|)(u_{n_k} - u)^2 dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Concluimos que $\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, o que completa a prova. \blacksquare

Proposição B.1. *X com a norma $\|\cdot\|$ constitui um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Podemos mostrar através de cálculos rotineiros que

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b(|x|)u \cdot v) dx \end{aligned}$$

é um produto interno do qual a norma $\|\cdot\|$ provém. Em virtude do Lema B.6, isso é suficiente para provar a proposição. \blacksquare

A desigualdade no Lema B.4 é a desigualdade de Schwarz para o produto interno em X definido logo acima.

B.4 Regularidade do funcional φ

Nesta seção discutimos uma série de propriedades de regularidade do funcional φ que foram usadas no Capítulo 2 em diversas situações. Por exemplo, na aplicação do Teorema do Passo da Montanha para encontrar pontos críticos não-triviais de φ , precisamos do fato de que φ é de classe C^1 . No estudo

B.4 Regularidade do funcional φ

das propriedades qualitativas das energias $\lambda^\pm(\rho, \sigma)$, usamos a continuidade fraca de

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_{\Omega(\rho, \sigma)} G(|x|, u) dx \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Para mostrar que o funcional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , o escreveremos como a soma dos funcionais T e $-J$, onde J é dado por (B.13) e

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega(\rho, \sigma)} (|\nabla u|^2 + b(|x|)|u|^2) dx \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Basta mostrarmos que T e J são de classe C^1 . Em virtude do crescimento subcrítico dado pelo Lema B.2, J está bem definido em X pelas desigualdades de Hölder e Sobolev (conferir cálculos na demonstração do item (b) do Lema 2.1), logo φ está bem definido em X . O argumento a seguir permanece válido se substituímos g por ψ e G por Ψ satisfazendo (f_1) – (f_5) ou (f_1) – (f_4) , (f'_5) .

Algumas vezes, escrevemos $\Omega(\rho, \sigma) = \Omega$ por simplicidade de notação.

Lema B.7. *O funcional T dado por (B.14) é de classe C^1 e*

$$\langle T'(u), v \rangle = \int_{\Omega(\rho, \sigma)} (\nabla u \cdot \nabla v + b(|x|)uv) dx, \quad u, v \in X.$$

Demonstração. Mostraremos que T é diferenciável a Fréchet,

$$\langle T'(u), v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b(|x|)uv) dx, \quad u, v \in X, \quad (\text{B.15})$$

e T' é contínua em X' . Primeiramente, notemos que

$$\frac{|T(u+v) - T(u) - \langle T'(u), v \rangle|}{\|v\|} = \frac{\|v\|}{2} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0, \quad u \in X.$$

Para cada $u \in X$, a aplicação $\langle T'(u), \cdot \rangle$ definida por (B.15) é claramente linear e $|\langle T'(u), v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, $v \in X$, pelo Lema B.4, logo $T'(u) \in X'$. Dadas $u \in X$ e uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X convergente a u quaisquer, temos que

$$\begin{aligned} \|T'(u_n) - T'(u)\|_{X'} &= \sup_{\|v\|=1} |\langle T'(u_n) - T'(u), v \rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

pelo Lema B.4 novamente, o que mostra que T' é contínua em X' . Concluimos que T é de classe C^1 e sua derivada é dada por (B.15). \blacksquare

B.4 Regularidade do funcional φ

Lema B.8. *O funcional J dado por (B.13) é de classe C^1 e*

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega(\rho, \sigma)} vg(|x|, u) dx, \quad u, v \in X.$$

Demonstração. Aplicamos a Proposição A.4 com $E = X$, $F = \mathbb{R}$ e $I = J$.

(I) Fixemos arbitrariamente $u, v \in X$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma aplicação $\theta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $|\theta(t, x)| \leq |t|$ para cada $(t, x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \Omega$ e tal que

$$\begin{aligned} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{\Omega} (G(|x|, u(x) + tv(x)) - G(|x|, u(x))) dx \\ &= \int_{\Omega} v(x)g(|x|, u(x) + \theta(t, x)v(x)) dx, \quad t \neq 0. \end{aligned}$$

Como $\theta(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ para cada $x \in \Omega$, a continuidade de g (hipótese (f_1)) nos garante que

$$v(x)g(|x|, u(x) + \theta(t, x)v(x)) \xrightarrow{t \rightarrow 0} v(x)g(|x|, u(x)), \quad x \in \Omega.$$

Por outro lado, sempre que $0 < |t| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} |v(x)g(|x|, u(x) + \theta(t, x)v(x))| &\leq |v(x)| [|u(x) + \theta(t, x)v(x)| \\ &\quad + A |u(x) + \theta(t, x)v(x)|^s] \\ &\leq |v(x)| |u(x)| + |v(x)|^2 \\ &\quad + 2^{s-1}A |v(x)| |u(x)|^s + 2^{s-1}A |v(x)|^{s+1} \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$, pois $\tau \mapsto |\tau|^s$, $\tau \in \mathbb{R}$, é convexa ($s > 1$), e pelo Lema B.2 com $A = (s+1)A(1/2)$. Como X está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para $2 \leq p < 2^*$ e $s < 2^* - 1$ (conferir (2.4)), segue pela Desigualdade de Hölder que o terceiro membro nas desigualdades acima é integrável em Ω . Concluímos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que J é derivável a Gâteaux e

$$(\nabla J(u))(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \int_{\Omega} v(x)g(|x|, u(x)) dx, \quad u, v \in X.$$

(II) Claramente $\nabla J(u)$ é linear para cada $u \in X$. Além disso, como nos cálculos em (I), temos

$$\begin{aligned} |(\nabla J(u))(v)| &\leq \int_{\Omega} |v(x)| [|u(x)| + A |u(x)|^s] dx \\ &\leq \|v\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + A \|v\|_{L^{s+1}} \|u\|_{L^{s+1}}^s \\ &\leq ((C(2))^2 + A(C(s+1))^{s+1}) \|u\| \|v\|, \quad u, v \in X, \end{aligned}$$

B.4 Regularidade do funcional φ

em virtude das imersões de X em $L^p(\Omega)$ para $2 \leq p < 2^*$. Isto mostra que $\nabla J(u) \in X'$, $u \in X$.

(III) Finalmente, dadas $u \in X$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X convergente a u quaisquer, consideremos uma subsequência qualquer de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que continuamos a denotar por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por simplicidade. Então $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < 2^*$, por causa das imersões; em particular, passando-se a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ e $|u_n(x)|, |u(x)| \leq h_2(x), h_{s+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, para quase todo $x \in \Omega$, para certas $h_2 \in L^2(\Omega)$ e $h_{s+1} \in L^{s+1}(\Omega)$. Dados $K_1, K_2 > 0$, sejam

$$\Omega_1 = \Omega_1(K_1) = \{x \in \Omega; |x| \geq K_1\},$$

$$\Omega_2 = \Omega_2(K_1, K_2) = \{x \in \Omega; |x| < K_1 \text{ e } |h_2(x)|, |h_{s+1}(x)| > K_2\}$$

e

$$\Omega_3 = \Omega_3(K_1, K_2) = \{x \in \Omega; |x| < K_1, |h_2(x)| \leq K_2 \text{ ou } |h_{s+1}(x)| \leq K_2\}.$$

Tomemos $\epsilon > 0$ e $v \in X$ com $\|v\| = 1$ quaisquer. Se $K_1 > 0$ é suficientemente grande, então

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} |v(x)| \cdot |g(|x|, u_n(x)) - g(|x|, u(x))| dx \\ & \leq 2 \int_{\Omega_1} |v(x)| [|h_2(x)| + A |h_{s+1}(x)|^s] dx \\ & \leq 2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|h_2\|_{L^2(\Omega \setminus B(0, K_1))} \\ & \quad + 2A \|v\|_{L^{s+1}(\Omega)} \|h_{s+1}\|_{L^{s+1}(\Omega \setminus B(0, K_1))}^s \\ & \leq 2C(2) \|h_2\|_{L^2(\Omega \setminus B(0, K_1))} + 2AC(s+1) \|h_{s+1}\|_{L^{s+1}(\Omega \setminus B(0, K_1))}^s \\ & < \epsilon/3, \end{aligned}$$

pois h_2^2 e h_{s+1}^{s+1} são integráveis em Ω . Analogamente, tendo sido escolhido K_1 suficientemente grande, se K_2 é grande o suficiente, então temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} |v(x)| \cdot |g(|x|, u_n(x)) - g(|x|, u(x))| dx \\ & \leq 2C(2) \|h_2\|_{L^2(\Omega \cap [h_2 > K_2])} + 2AC(s+1) \|h_{s+1}\|_{L^{s+1}(\Omega \cap [h_{s+1} > K_2])}^s \\ & < \epsilon/3. \end{aligned}$$

Por fim, notemos que

$$|g(|x|, u_n(x)) - g(|x|, u(x))|^{(s+1)/s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para quase todo } x \in \Omega$$

e

$$|g(|x|, u_n(x)) - g(|x|, u(x))|^{(s+1)/s} \leq 2[K_2 + AK_2^s]^{(s+1)/s}, \quad x \in \Omega_3,$$

B.4 Regularidade do funcional φ

sendo que $|\Omega_3| < \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_3} |v(x)| \cdot |g(|x|, u_n(x)) - g(|x|, u(x))| dx \\ & \leq 2C(s+1) \left(\int_{\Omega_3} |g(|x|, u_n(x)) - g(|x|, u(x))|^{(s+1)/s} dx \right)^{s/(s+1)} \\ & < \epsilon/3 \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Logo, se $n \in \mathbb{N}$ é suficientemente grande, então

$$\begin{aligned} \|\nabla J(u_n) - \nabla J(u)\|_{X'} & \leq \sup_{\|v\|=1} \int_{\Omega} |v(x)| |g(|x|, u(x)) - g(|x|, u_n(x))| dx \\ & \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3, \end{aligned}$$

o que completa a prova da continuidade de ∇J . Segue pela Proposição A.4 que J é de classe C^1 e $J' = \nabla J$, como afirmado. \blacksquare

Combinando os Lemas B.7 e B.8, temos a

Proposição B.2. *O funcional $\varphi : X = X(\rho, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por (2.6) (página 29) é de classe C^1 sempre que $0 \leq \rho < \sigma \leq \infty$. Além disso,*

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b(|x|)uv - vg(|x|, u)) dx, \quad u, v \in X.$$

Corolário. $\varphi|_F$ é de classe C^1 para qualquer subespaço fechado F de X e

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + b(|x|)uv - vg(|x|, u)) dx, \quad u, v \in F.$$

Proposição B.3. *O funcional J dado por (B.14) é fracamente contínuo.*

Demonstração. Basta mostrarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (J(u_n) - J(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (G(|x|, u_n(x)) - G(|x|, u(x))) dx = 0$$

para quaisquer u e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X com $u_n \rightharpoonup u$. Consideremos uma subsequência qualquer de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que continuamos a denotar por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por simplicidade. Como $u_n \rightharpoonup u$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em X . Assim, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $L^2(\Omega)$ e em $L^{s+1}(\Omega)$ por causa da compacidade das imersões (veja também o Teorema A.1). Passando novamente a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ e que existem $h_2 \in L^2(\Omega)$ e $h_{s+1} \in L^{s+1}(\Omega)$

B.5 O Teorema do Passo da Montanha

tais que $|u(x)|, |u_n(x)| \leq h_2(x), h_{s+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, para quase todo $x \in \Omega$, como na demonstração do Lema B.8. Por um lado,

$$G(|x|, u_n(x)) - G(|x|, u(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para quase todo } x \in \Omega.$$

Por outro lado,

$$|G(|x|, u_n(x)) - G(|x|, u(x))| \leq 2|h_2(x)|^2 + 2A(1)|h_{s+1}(x)|^{s+1}$$

para quase todo $x \in \Omega$ pelo Lema B.2. O resultado segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. ■

B.5 O Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção enunciamos a condição de Palais-Smale e uma pequena variação do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti & Rabinowitz, este último sendo uma das principais ferramenta utilizada no trabalho.

Dado um espaço de Banach real E , denotamos por $C^1(E, \mathbb{R})$ o conjunto dos funcionais de E em \mathbb{R} que são diferenciáveis a Fréchet e cujas derivadas de Fréchet são contínuas. Dizemos que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se cada sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(I(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e $I'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ possui uma subsequência convergente.

Para provar o Teorema do Passo da Montanha, usamos o lema de deformação a seguir. Como este é meramente uma tradução do enunciado de [19, Proposition 2.1, pág. 7], omitimos sua demonstração.

Proposição B.4. *Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Para cada $s \in \mathbb{R}$, seja $A_s := \{u \in E; I(u) \leq s\}$. Se c não é um valor crítico de I , então, dado arbitrariamente $\bar{\epsilon} > 0$, existem um $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tais que*

- (a) $\eta(1, u) = u$ sempre que $I(u) \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]$;
- (b) $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subseteq A_{c-\epsilon}$.

Demonstração. Conferir [19, Appendix A]; mais especificamente, 2° e 7° no Theorem A.4. ■

Teorema B.1 (Teorema do Passo da Montanha). *Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo*

- (a) $I(0) = 0$.
- (b) *Existem constantes $r_0, c_0 > 0$ tais que $I(u) \geq c_0$ sempre que $\|u\| = r_0$.*
- (c) *Existe um $e \in E - \overline{B(0, r_0)}$ tal que $I(e) < 0$.*

B.5 O Teorema do Passo da Montanha

(d) I satisfaz a condição de Palais-Smale.

Então I possui um valor crítico $c \geq c_0$. De fato, c é dado por

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E); g(0) = 0, g(1) \notin \overline{B(0, r_0)} \text{ e } I(g(1)) < 0\}.$$

Em particular, se $I(u) = c$, então $u \neq 0$.

Demonstração. Por sua definição fica claro que $c < \infty$. Por outro lado, o Teorema da Alfândega garante que $\gamma([0,1]) \cap \{u \in E; \|u\| = r_0\} \neq \emptyset$ para cada $\gamma \in \Gamma$, logo $c \geq c_0 > 0$.

Suponhamos, ao contrário, que c não seja um valor crítico de I . Tomemos $\bar{\epsilon} = c_0/2$ na Proposição B.4 e sejam $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ satisfazendo (a) e (b) na mesma proposição. Seja $g \in \Gamma$ qualquer tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon.$$

Definamos

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \eta(1, g(t)) \end{aligned}.$$

Como $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ temos que h é contínua. Além disso, $I(g(0)), I(g(1)) \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]$, pois

$$c - \bar{\epsilon} \geq c_0 - c_0/2 > 0 \geq I(g(0)), I(g(1)).$$

Segue por (a) que

$$\begin{aligned} h(0) &= \eta(1, g(0)) = g(0) = 0, \\ h(1) &= \eta(1, g(1)) = g(1) \notin \overline{B(0, r_0)} \end{aligned}$$

e

$$I(h(1)) = I(g(1)) < 0.$$

Portanto, de fato, $h \in \Gamma$. Em particular,

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(h(t)).$$

Por outro lado, temos que $\eta(1, A_{c+\epsilon}) \subseteq A_{c-\epsilon}$ por (b). Logo

$$\max_{t \in [0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon < 0,$$

uma contradição. Concluimos que c é um valor crítico de I . ■

B.6 Outro lema de deformação

B.6 Outro lema de deformação

Apresentamos abaixo o lema de deformação quantitativo utilizado na demonstração do Lema 2.6. Este lema foi estabelecido por Willem em [24].

Lema B.9. *Sejam E um espaço de Banach, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, $S \subseteq E$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ tais que*

$$u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \Rightarrow \|I'(u)\|_{E'} \geq 8\epsilon/\delta.$$

Então existe $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tal que

- (a) $\eta(t, u) = u$ sempre que $t = 0$ ou $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,
- (b) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subseteq I^{c-\epsilon}$,
- (c) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de E sobre si mesmo para cada $t \in [0, 1]$,
- (d) $\|\eta_t, u - u\|_E \leq \delta$, $u \in E$, $t \in [0, 1]$,
- (e) $I(\eta(\cdot, u))$ é não-crescente para cada $u \in E$,
- (f) $I(\eta(t, u)) < c$ sempre que $u \in I^c \cap S_\delta$.

Aqui, usamos as notações $I^\alpha := \{u \in E; I(u) \leq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $S_r := \{u \in E; \|u - S\|_E \leq r\}$, $r > 0$.

Demonstração. Conferir [24, Lemma 2, págs. 6–7] ou [25, Lemma 2.3, págs. 38–39]. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, Robert A.; *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] Agmon, Shmuel; *The L^p Approach to the Dirichlet Problem: Part I—Regularity Theorems*. Annali della Scuola Norm. Sup.—Pisa, 1959.
- [3] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H.; *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*. J. Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.
- [4] Bartsch, Thomas and Willem, Michel; *Infinitely Many Radial Solutions of a Semilinear Elliptic Problem on \mathbb{R}^N* . Arch. Rational Mech. Anal. **124** (1993) 261–276.
- [5] Bartsch, Thomas and Willem, Michel; *Infinitely Many Nonradial Solutions of a Euclidean Scalar Field Equation*. Journal of Functional Analysis **117**, 447–460 (1993).
- [6] Berestycki, H. and Lions, Pierre-Louis; *Nonlinear Scalar Field Equations I, II*. Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983) 313–345, 347–375.
- [7] Brézis, Haïm; *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones*. Versión española de Juan Ramón Esteban. Alianza Editorial, 1984.
- [8] Evans, Lawrence C.; *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 19. American Mathematical Society, 1998. Reprinted with corrections, 2002.
- [9] de Figueiredo, Djairo Guedes; *Métodos Variacionais em Equações Diferenciais*. Matemática Universitária N. 7, Junho de 1988, 21–47.
- [10] Folland, Gerald B.; *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications (Second Edition)*. Wiley-Interscience, 1999.
- [11] Furtado, Marcelo Fernandes; *Métodos Variacionais—Uma Introdução*. Trabalhos de Graduação em Matemática No. 2/96. UnB, 1996.
- [12] Gilbarg, David and Trudinger, Neil S.; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Second Edition)*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 224. Springer, 1983.

Referências Bibliográficas

- [13] Nehari, Z.; *Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations*. Acta Math. **105** (1961), 141–175.
- [14] Kavian, Otared; *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques & Applications 13. Springer, 1993.
- [15] Lima, Elon Lages; *Curso de Análise Vol. 2 (Oitava Edição)*. Projeto Euclides. IMPA, 2005.
- [16] Lions, Pierre-Louis; *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*. Journal of Functional Analysis **49** (1982), 315–334.
- [17] Lorca, Sebastián and Ubilla, Pedro; *Symmetric and nonsymmetric solutions for an elliptic equation on \mathbb{R}^N* . Nonlinear Analysis **58** (2004) 961–968.
- [18] Liu, Zhaoli and Wang, Zhi-Qiang; *On the Ambrosetti-Rabinowitz Superlinear Condition*. Advanced Nonlinear Studies **4** (2004), 561–572.
- [19] Rabinowitz, Paul H.; *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, Number 65. American Mathematical Society, 1988.
- [20] Rudin, Walter; *Principles of Mathematical Analysis (Third Edition)*. McGraw-Hill, 1976.
- [21] Rudin, Walter; *Real and Complex Analysis (Third Edition)*. McGraw-Hill, 1986.
- [22] Strauss, A. Walter; *Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions*. Commun. math. Phys. **55** (1977), 149–162.
- [23] Struwe, Michael; *Variational Methods—Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems (Second Edition)*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Volume 34. Springer, 1996.
- [24] Willem, Michel; *Lectures on Critical Point Theory*. Trabalho de Matemática N° 199. Universidade de Brasília, 1983.
- [25] Willem, Michel; *Minimax Theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Volume 24. Birkhäuser, 1997.